

EJERCITO ARGENTINO



DIRECCION GENERAL
DEL
INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR



PUBLICACION TECNICA N° 13

GENERALIZACION DE LA LEY DE PROBABILIDAD
DE LOS ERRORES DE OBSERVACION

BUENOS AIRES

1948

GENERALIZACION DE LA LEY DE PROBABILIDAD
DE LOS ERRORES DE OBSERVACION

GENERALIZACION DE LA LET. DE PROPIEDAD
DE LOS CARROS DE OBSERVACION

EJERCITO ARGENTINO



DIRECCION GENERAL
DEL
INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR



PUBLICACION TECNICA N° 13

GENERALIZACION DE LA LEY DE PROBABILIDAD DE LOS ERRORES
DE OBSERVACION

BUENOS AIRES

1948

DIRECCION GENERAL

DEL

INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR



ES PROPIEDAD DEL INSTITUTO

GEOGRAFICO MILITAR

LEY 11.723

REPUBLICA ARGENTINA

CONSERVACION DE LA LEY DE PROTECCION DE LOS DERECHOS
DE AUTOR

IMPRESA NACIONAL

1924

PROLOGO

En todas las ciencias de observación y, particularmente, en el campo de la geodesia, la geofísica y la astronomía, es de singular importancia el examen profundo de la precisión de los resultados obtenidos. Con esta finalidad, fundó Gauss su teoría de la probabilidad, cuyo fruto se condensa en la conocida función que lleva su nombre

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$$

de la que deriva el método de compensación de los mínimos cuadrados, que constituye el núcleo central de esta clase de investigaciones.

Partiendo de esta fórmula, el Ingeniero Civil - Asesor Técnico de la División Cálculos, Sub - Inspector *D. Guillermo Riggi O'Dwyer*, ha hecho el interesante estudio crítico motivo de la presente publicación, que la Dirección General del Instituto Geográfico Militar tiene el agrado de someter a la consideración de los señores geodestas.

Buenos Aires, marzo de 1948.

OTTO H. HELBLING

General de Brigada

Director General del Instituto Geográfico Militar.

REPORT

The following report was prepared by the Committee on the part of the Board of Directors of the American Society of Civil Engineers, in accordance with the resolution of the Board of Directors, passed at the meeting held at New York, N. Y., on the 10th day of December, 1908.

The Committee on the part of the Board of Directors of the American Society of Civil Engineers, in accordance with the resolution of the Board of Directors, passed at the meeting held at New York, N. Y., on the 10th day of December, 1908, has the honor to report to the Board of Directors the results of its investigations and the conclusions to which it has arrived.

The Committee on the part of the Board of Directors of the American Society of Civil Engineers, in accordance with the resolution of the Board of Directors, passed at the meeting held at New York, N. Y., on the 10th day of December, 1908, has the honor to report to the Board of Directors the results of its investigations and the conclusions to which it has arrived.

GENERALIZACION DE LA LEY DE PROBABILIDAD DE LOS ERRORES DE OBSERVACION

1. **Objeto:** Universalmente se admite que los errores casuales que afectan toda medición tienen una probabilidad expresada analíticamente por la ley de Gauss:

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (1)$$

donde h llamada "módulo de precisión", es característica para toda la serie de errores resultantes de la múltiple medición de una magnitud.

La expresión (1) define la función de la probabilidad; la probabilidad de que un error x esté comprendido en un entorno dx , será:

$$dP = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \quad (2)$$

que es la probabilidad elemental.

La función de probabilidad de Gauss tiene una falla muy grande; ella admite la posibilidad de errores infinitos como resultado de medir magnitudes finitas.

Inmediatamente se percibe que es absurdo admitir tal hipótesis, así como concebir que el error de medición pueda resultar igual o mayor que la magnitud medida.

Es evidente que en toda medición debe haber un error máximo admisible y que la ley de probabilidades de los errores debe expresarse en función de este error.

Hallar una ley de este tipo, es el objeto de este trabajo.

2. **Desarrollo:** Basaremos este estudio en algunos resultados experimentales; llamaremos L a la verdadera magnitud del grandor

que se mide, L_0 a su valor más probable, x al error casual verdadero y v al desvío, siendo l una lectura efectuada.

$$x = L - l \quad (3)$$

$$v = L_0 - l \quad (4)$$

De aquí resulta:

$$x - v = L - L_0 = K \quad (5)$$

valor constante ya que L y L_0 son valores fijos.

Luego:

$$x = v + K \quad (6)$$

expresión que nos dice que un error verdadero x es igual al correspondiente desvío v , incrementado en un error constante K que puede ser positivo o negativo.

Las leyes de distribución de los errores x y de los desvíos v serán similares, pero referidas a orígenes desplazados entre sí en la cantidad K .

La experiencia demuestra que los desvíos obtenidos contra el valor más probable, se agrupan en torno al origen, observándose que:

- a) Se presentan tantos desvíos positivos, como negativos.
- b) Son más numerosos los desvíos pequeños, que los grandes.

El punto a) nos dice que los desvíos positivos y los negativos, abstracción hecha de su signo, son igualmente probables; luego, la probabilidad de los desvíos positivos será igual a $1/2$, lo mismo que la de los negativos.

El punto b) nos dice que los desvíos mas próximos a cero son los mas probables y que a medida que aumentan de tamaño, su probabilidad disminuye; los desvíos máximos, positivo y negativo, tendrán una cierta probabilidad que no será nula, aunque si muy pequeña.

Pero todo desvío mayor que el máximo, no tendrá probabilidad de presentarse.

El punto b) nos dice también que si $\varphi(v) dv$ es la probabilidad elemental de los desvíos y $\varphi(v)$ la función de probabilidad, esta tendrá su máximo en coincidencia con el origen de los desvíos; el punto a) expresa que la función $\varphi(v)$ es simétrica con respecto al eje que pasa por dicho origen.

La función $\varphi(v)$, de acuerdo a lo dicho y a los resultados de la experiencia, tendrá la forma que ilustra la figura 1, y estará limitada entre los desvíos máximos v_M y $-v_M$. Puesto que sobre el segmento $+v_M$ y $-v_M$ deben estar todos los desvíos, es evidente que la probabilidad de que un desvío caiga entre estos límites debe valer 1.

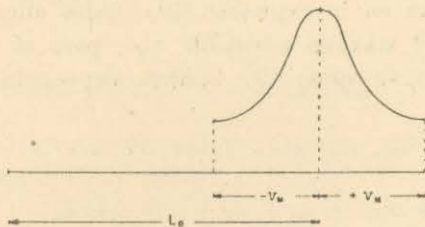


Fig. 1

$$P = \int_{-v_M}^{+v_M} \varphi(v) dv = 1 \quad (7)$$

Para los errores verdaderos x , que se diferencian de los desvíos en una constante K , se tendrá una ley de distribución análoga, desplazada con respecto al origen de los desvíos, de una cantidad K .

Se tendrá igualmente dos errores máximos $+x_M$ y $-x_M$, una ley de probabilidad $\varphi(x)$ y de igual modo:

$$\int_{-x_M}^{+x_M} \varphi(x) dx = 1 \quad (8)$$

Un error de observación es, en realidad, el resultado de una gran cantidad de errores elementales ϵ_i , cada uno de los cuales es originado por uno de los elementos que intervienen en la medición.

Así, por ejemplo, cuando se bisecta un punto con el retículo de un teodolito y se lee en el círculo horizontal, la dirección correspondiente a esta lectura estará afectada de un error verdadero final x ; pero el valor de x dependerá del error de bisección, del error de colimación, de la inclinación de cada uno de los ejes, del error de "run" de cada microscopio, de los errores de los tornillos micrométricos, de los errores de bisección de los trazos del círculo, del error de cada trazo de círculo bisectado, de los errores de desplazamiento de la visual por efectos de la refracción, etc.

Cada uno de estos errores elementales ϵ_i influirá sobre el error total x según su magnitud y signo; en general, podremos poner:

$$x = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n \quad (9)$$

Es evidente que, si estando presentes en una medición los errores ϵ_i que figuran en la expresión (9), todos ellos son positivos, el valor de x será el máximo admisible x_M ; pero si todos ellos hubieran sido negativos su suma (9) hubiera expresado el error máximo negativo $-x_M$.

Luego:

$$\begin{aligned} +x_M &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n \\ -x_M &= -\epsilon_1 - \epsilon_2 - \dots - \epsilon_n \end{aligned} \quad (10)$$

Supongamos que uno de estos errores, el ϵ_1 por ejemplo, hubiera sido negativo y los restantes, positivos; tendríamos:

$$x_1 = -\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n$$

o sea

$$x_1 = x_M - 2\epsilon_1 \quad (11)$$

si el error elemental negativo hubiera sido ϵ_2 se hubiera obtenido otro error x , dado por

$$x_1 = x_M - 2\epsilon_2$$

y como cualquiera de los ϵ_i pudo ser el negativo, resultarán posibles n errores x_1 definidos por

$$x_1 = x_M - 2\epsilon_i \quad (12)$$

Estos n errores x_1 son aquellos que comprenden un solo error elemental negativo.

Si dos errores elementales fueran negativos, tendríamos errores dados por:

$$x_2 = x_M - 2(\epsilon_i + \epsilon_j) \quad (13)$$

pudiendo ser los errores elementales ϵ_i y ϵ_j cualquiera de las parejas que se pueden formar con los n errores elementales que intervienen.

El número de errores x_2 será por lo tanto, el de las combinaciones que se pueden formar con n elementos tomados de dos en dos, o sea $\frac{n(n-1)}{2!}$.

En general, si i errores elementales son negativos, se tendrá:

$$x_i = x_M - 2 \sum \epsilon_i \quad (14)$$

y el número de errores posibles de este tipo será $\frac{n(n-1) \cdots (n-i+1)}{i!}$

Cuando todos los errores elementales resultan ser negativos, o sea, para $i = n$ la relación (14) nos dá

$$x_n = x_M - 2 x_M = -x_M \quad (15)$$

que será el máximo error negativo y del cual habrá un solo valor posible, ya que las combinaciones de n elementos tomados de n en n es igual a la unidad.

Analicemos ahora, como deben ser entre sí los errores elementales ϵ_i ; supongamos tener en una observación, cuatro errores $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ y ϵ_4 , con los que se podrán obtener los siguientes errores x_i :

$x_M = x_0 = + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$ $x_1 = - \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$ $x_1 = + \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4$ $x_1 = + \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$ $x_1 = + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\}$	$\begin{array}{c} \text{Errores posibles } N_0 = 1 \\ \\ \\ \text{,, ,, } N_1 = 4 \end{array}$
$x_2 = - \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$ $x_2 = - \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$ $x_2 = - \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4$ $x_4 = + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$ $x_2 = + \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4$ $x_2 = + \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\}$	$\begin{array}{c} \text{,, ,, } N_2 = 6 \end{array}$
$x_3 = - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$ $x_3 = - \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4$ $x_3 = - \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4$ $x_3 = + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$	$\begin{array}{c} \text{,, ,, } N_3 = 4 \end{array}$
$x_M = x_4 = - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4$	$\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\}$	$\begin{array}{c} \text{,, ,, } N_4 = 1. \end{array}$

Supongamos que unos de los errores elementales, el ϵ_1 , por ejemplo, sea muy grande y los otros tres pequeños, Fig. 2; el error máximo x_M será representado por el segmento OA y el máximo negativo, por el simétrico OA' .

Tres de los valores de x , caerán en la proximidad del punto B y el cuarto, correspondiente a $x_1 = -\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$ caerá en C' , del lado de los errores negativos.

De igual modo tendremos en B' tres errores x , negativos y en C uno positivo.

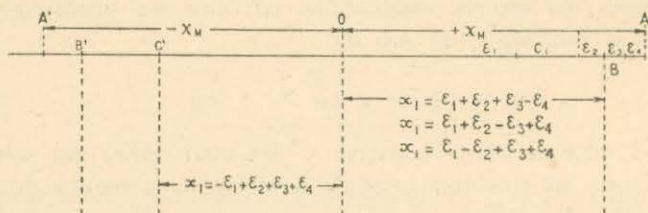


Fig. 2

Si representamos los 6 errores x_2 obtendremos otra agrupación semejante, sin lograr errores x_i en la proximidad del origen; resulta de esto, que la gráfica de la distribución de los errores tendrá una forma similar a la que representa la Fig. 3, que no presentará su máximo para $x = 0$.

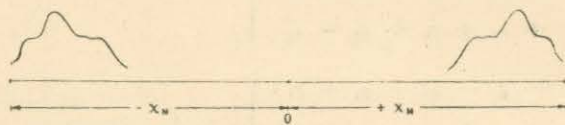


Fig. 3

A medida que aumentamos el número de errores elementales ϵ_i y tomamos a estos con un tamaño cada vez más uniforme, la curva de distribución se va asemejando a la que resulta de la experiencia, representada en la Fig. 1.

Por otra parte, es evidente que el observador corregirá su instrumento y operará en una forma tal que ningún error elemental sea mayor que los restantes; si, por ejemplo, el error de bisección es de $10''$, será inútil corregir los demás errores hasta reducirlos a fracciones de segundos, ya que el mayor error limita la precisión de la medida.

Podemos, por lo tanto, admitir que todos los errores elementales son de igual tamaño en las mediciones precisas.

Esto sentado, el error máximo resultará ser:

$$x_M = \sum \epsilon_i \cong n \epsilon \quad (16)$$

y los errores que contienen i errores elementales negativos, serán:

$$x_i = n \epsilon - 2i \epsilon = \epsilon(n - 2i) \quad (17)$$

De esta expresión general resulta, para $i=0$ el error máximo $x_0 = x_M$; para $i = \frac{n}{2}$ el error nulo $x_{\frac{n}{2}} = 0$ y para $i=n$ el error máximo negativo $x_n = -x_0 = -x_M$.

El número de errores del orden x_i será el de combinaciones que se pueda formar con n elementos, tomados de i en i o sea,

$$N_i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (18)$$

El número total de errores posibles, para n errores elementales, será:

$$N = \sum_{i=0}^n N_i = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (19)$$

Si desarrollamos por la serie del binomio la potencia $(1+1)^n$ se tendrá:

$$(1+1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \sum_{n=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (20)$$

Luego:

$$N = 2^n \quad (21)$$

Siendo N_i el número de errores de orden x_i y N el total de errores posibles de formar con n errores elementales ϵ ; la probabilidad de que un error tenga el tamaño x_i será:

$$P_i = \frac{N_i}{N} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{1}{2^n} \quad (22)$$

Admitida la igualdad absoluta de los errores elementales, los N_i valores que puedan resultar para x_i serán todos iguales; en la realidad, los ϵ_i no serán estrictamente iguales, sino sólo de un mismo orden, pudiendo diferir entre sí en pequeños importes.

De esto resulta que en la práctica, los N_i errores x_i no serán iguales sino de valores próximos y resultarán distribuidos sobre un entorno.

Sin embargo, todos ellos tienen la misma probabilidad P_i dada por la relación (22).

Los distintos entornos no serán iguales entre sí; por ello, si dividimos el eje x en intervalos y contamos el número de errores que realmente caen dentro de cada uno de ellos, este número diferirá del obtenido por cálculo con la expresión (18).

Esto justifica las anomalías que se encuentran en la práctica, que se traducen por un número diferente de errores reales del que se obtiene teóricamente.

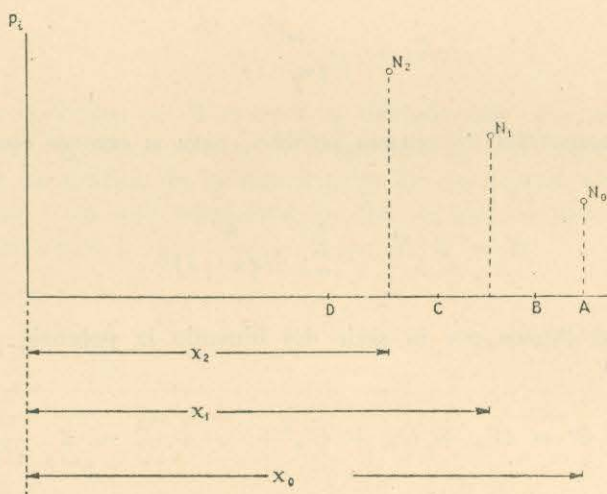


Fig. 4

Si representamos en la Fig. 4, la gráfica de la distribución de errores x_i , para errores elementales del mismo orden, obtendremos en OA , el error máximo x_M cuyo número es $N_0 = 1$ y cuya probabilidad es $\frac{1}{2^n}$.

En el entorno BC , estarán los n errores x_1 cuya probabilidad es $P_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \frac{1}{2^n}$; en el entorno CD , los $\frac{n!}{2!(n-2)!}$ errores x_2

etc. Si en el centro de estos entornos tomamos ordenadas proporcionales al número de errores que caen dentro de ellos, o a sus probabilidades, estas ordenadas serán los valores de $\varphi(x)$, función de la probabilidad, dados por la relación (22).

$$\varphi(x) = P_i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{1}{2^n} \quad (23)$$

Pero como los distintos x_i no son rigurosamente iguales y caen en diversos puntos de su entorno, teniendo todos ellos la misma probabilidad, podemos reemplazar este diagrama de ordenadas por otro de superficies, tal, que la superficie del paralelogramo construido sobre cada entorno represente la probabilidad de los errores que caen dentro del mismo. Fig. 5.

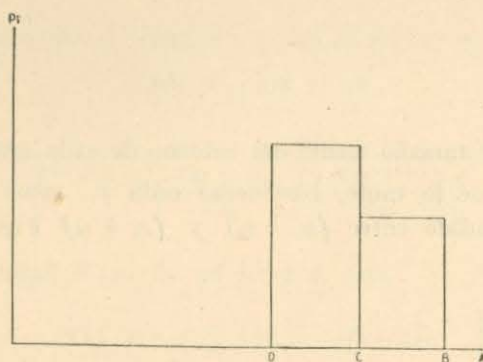


Fig. 5

La altura de cada rectángulo, deberá ser igual a $\frac{P_i}{\Delta x_i}$ siendo P_i la probabilidad y Δx_i el tamaño del entorno que comprende los errores de orden x_i ; de este modo, al multiplicar esta altura por su base Δx_i se obtendrá una superficie igual a P_i .

El cociente $\frac{P_i}{\Delta x_i}$ será la ordenada de la función de la probabilidad $\varphi(x)$ dada por:

$$\varphi(x) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{1}{2^n \cdot \Delta x_i} \quad (24)$$

Si todos los errores elementales son del mismo orden, podemos definir un valor promedio ϵ_0 , dado por

$$\epsilon_0 = \frac{\sum \epsilon_i}{n} \quad (25)$$

y por lo tanto, el error máximo será:

$$x_M = n \epsilon_0 \quad (26)$$

y un error x_i :

$$x_i = \epsilon_0 (n - 2i) \quad (27)$$

Dos errores consecutivos x_i y x_{i+1} , diferirán de:

$$x_i - x_{i+1} = \epsilon_0 (n - 2i) - \epsilon_0 [n - 2(i+1)]$$

ó sea

$$x_i - x_{i+1} = 2\epsilon_0 \quad (28)$$

Este será el tamaño medio del entorno de cada error.

Podemos, por lo tanto, considerar cada x_i como centro de un entorno comprendido entre $(x_i - \epsilon_0)$ y $(x_i + \epsilon_0)$ Fig. 6.

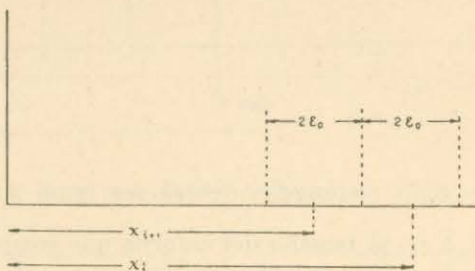


Fig. 6

En los centros de estos entornos $\Delta x_i = 2\epsilon_0$ se tomará la altura del rectángulo igual a $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{1}{2^n \cdot 2\epsilon_0} \quad (29)$$

que será la función de probabilidad buscada.

De la relación (27) obtenemos:

$$i = \frac{\epsilon_0 n - x_i}{2\epsilon_0} = \frac{x_M - x_i}{2\epsilon_0} \quad (30)$$

de donde

$$n - i = n - \frac{x_M - x_i}{2\epsilon_0} = \frac{x_M + x_i}{2\epsilon_0} = \frac{n\epsilon_0 + x_i}{2\epsilon_0} \quad (31)$$

La relación (30) se podrá escribir:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^n \cdot 2\epsilon_0} \frac{n!}{\left(\frac{x_M - x_i}{2\epsilon_0}\right)! \left(\frac{x_M + x_i}{2\epsilon_0}\right)!} \quad (32)$$

habiendo desaparecido el término i podemos poner, en general $x_i = x$ y se tendrá:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^n \cdot 2\epsilon_0} \frac{n!}{\left(\frac{x_M - x}{2\epsilon_0}\right)! \left(\frac{x_M + x}{2\epsilon_0}\right)!} \quad (33)$$

La probabilidad $P(x)$ de un error x , será:

$$P(x) = \varphi(x) \Delta x = \varphi(x) \cdot 2\epsilon_0$$

o sea:

$$P(x) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{\left(\frac{x_M - x}{2\epsilon_0}\right)! \left(\frac{x_M + x}{2\epsilon_0}\right)!} \quad (34)$$

Halleemos ahora, la función característica de esta ley de probabilidades, definida por:

$$\varphi(\alpha) = \sum_{x=-x_M}^{x=+x_M} e^{\alpha x} P(x) \quad (35)$$

o sea:

$$\varphi(\alpha) = \frac{n!}{2^n} \sum_{x=-x_M}^{x=+x_M} e^{\alpha x} \frac{1}{\left(\frac{n\epsilon_0 - x}{2\epsilon_0}\right)! \left(\frac{n\epsilon_0 + x}{2\epsilon_0}\right)!} \quad (36)$$

esta relación puede escribirse, para los distintos valores de x dados por la relación (27):

$$\varphi(\alpha) = \frac{n!}{2^n} \left[\frac{e^{\infty n \epsilon_0}}{n!} + \frac{e^{\infty \epsilon_0 (n-2)}}{(n-1)!} + \dots + e^{\infty \epsilon_0 (n-2n)} \right]$$

o sea:

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2^n} e^{\infty n \epsilon_0} \left[1 + n e^{-2\infty \epsilon_0} + \frac{n(n-1)}{2!} e^{-4\infty \epsilon_0} + \dots + e^{-2\infty n \epsilon_0} \right]$$

y también

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2^n} e^{\infty n \epsilon_0} (1 + e^{-2\infty \epsilon_0})^n \quad (37)$$

que será la función característica buscada.

Esta función puede también escribirse:

$$\varphi(\alpha) = \left(\frac{e^{\infty \epsilon_0} + e^{-\infty \epsilon_0}}{2} \right)^n = \cos^n(i\alpha\epsilon_0) = \cosh(\alpha\epsilon_0) \quad (38)$$

donde i es el símbolo de imaginario y $\cosh$ el coseno hiperbólico.

Podemos aprovechar las funciones características (37) o (38), para determinar los distintos momentos y las medias.

En efecto, el momento de orden m está dado por la derivada m -ésima de $\varphi(\alpha)$, para α igual a cero

$$M_m = \frac{d^m \varphi(\alpha)}{d \alpha^m (\alpha=0)} \quad (39)$$

El momento de orden m no es otra cosa que la esperanza matemática o valor probable de las x^m :

$$M_m = E(x^m) = \frac{\sum x_i^m P_i}{\sum P_i} \quad (40)$$

Cuando efectuamos una medición, el valor a priori de la probabilidad de cualquier error, es la misma; el valor de la probabilidad definida por la (34), es a posteriori, cuando ya se conoce el valor del error x .

Por lo tanto, en la (40) podemos hacer, habiendo N errores igualmente probables

$$\sum P_i = N P$$

$$P_i = P$$

quedando:

$$M_m = \frac{P \sum x_i^m}{N P} = \frac{1}{N} \sum x_i^m \quad (41)$$

Es decir que el momento M es el promedio de los errores x elevados a la potencia m .

Luego:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_N^0}{N} = 1 \\ M_1 &= \frac{x_1^1 + x_2^1 + \dots + x_N^1}{N} = \frac{1}{N} \sum x_i \\ M_2 &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = \frac{1}{N} \sum x_i^2 \\ &\dots \dots \dots \\ M_m &= \frac{x_1^m + x_2^m + \dots + x_N^m}{N} = \frac{1}{N} \sum x_i^m \end{aligned} \quad (42)$$

La derivada de orden cero de $\varphi(a)$ es $\varphi(a)$ misma; luego de la (38), resulta:

$$M_0 = \varphi(\alpha)_{(\alpha=0)} = \cos^n(0) = 1 \quad (43)$$

Para hallar los otros momentos, hagamos:

$$M_1 = \frac{d \varphi(\alpha)}{d \alpha_{(\alpha=0)}} = -n \cos^{n-1}(i \alpha \epsilon_0) \cdot i \cdot \epsilon_0 \operatorname{sen}(i \alpha \epsilon_0)_{(\alpha=0)} = 0 \quad (44)$$

Esto demuestra que el momento de orden 1, es nulo:

$$M_1 = \frac{x_1 + x_1 + \dots + x_N}{N} = 0 \quad (45)$$

Para hallar M_2 , hagamos

$$\frac{d^2 \varphi(\alpha)}{d\alpha^2} = n(i\epsilon_0)^2 \cos^{n-2}(i\alpha\epsilon_0) \operatorname{sen}^2(i\alpha\epsilon_0) - n(i\epsilon_0)^2 \cos^n(i\alpha\epsilon_0) \quad (46)$$

que, para $\alpha = 0$ resulta:

$$M_2 = n\epsilon_0^2 \quad (47)$$

Por lo tanto:

$$M_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = n\epsilon_0^2 \quad (48)$$

Procediendo de igual modo, hallaremos:

$$M_3 = 0$$

$$M_4 = \frac{x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_N^4}{N} = 3\epsilon_0^4 n^2 - 2\epsilon_0^4 n \quad (49)$$

.....

Todos los momentos de orden impar, serán nulos

De los valores hallados para M_2 y M_4 , se obtiene:

$$\begin{aligned} M_2 &= n\epsilon_0^2 \\ M_4 &= 3M_2^2 - 2\epsilon_0^2 M_2 \end{aligned} \quad (50)$$

Luego:

$$\epsilon_0^2 = \frac{3M_2^2 - M_4}{2M_2} = \frac{3}{2}M_2 - \frac{M_4}{2M_2} \quad (51)$$

conociendo M_2 y M_4 para una serie grande de errores ó desvíos, se podrá hallar con la expresión (51), el valor de ϵ_0^2 y por lo tanto, de la (50) se obtiene

$$n = \frac{M_2}{\epsilon_0^2} = \frac{2M_2^2}{3M_2^2 - M_4} \quad (52)$$

El error máximo $x^M = n \epsilon_0$, será:

$$x_M = \frac{2 M_2^2}{3 M_2^2 - M_4} \sqrt{\frac{3 M_2^2 - M_4}{2 M_2}}$$

o sea:

$$x_M = \pm M_2 \sqrt{\frac{2 M_2}{3 M_2^2 - M_4}} \quad (53)$$

Esta última expresión permite, para una serie dada de errores, hallar el error máximo admisible.

En la práctica, los valores de M_2 y M_4 serán mal conocidos por cuanto no se tendrán todos los errores posibles; por ello, esta fórmula será de aplicación mas exacta para observaciones repetidas un gran número de veces.

La función de la probabilidad definida por la relación (33), se puede expresar mediante la función Gamma, integral Euleriana de 1.ª especie, haciendo:

$$n! = \Gamma(n+1) \quad (54)$$

De la (33), resulta:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^M \cdot 2 \epsilon_0} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{x_M - x + 2 \epsilon_0}{2 \epsilon_0}\right) \Gamma\left(\frac{x_M + x + 2 \epsilon_0}{2 \epsilon_0}\right)} \quad (55)$$

De las propiedades de las integrales Eulerianas resulta que, para un número a dado, se verifica la fórmula de Gauss:

$$l \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = a(l a - 1) + l \sqrt{2 \pi} - \Omega_1(a) \quad (56)$$

siendo $\Omega_1(a)$ una función que tiende a cero cuando a tiende a infinito.

Aplicando logaritmos a la relación (55), resulta:

$$l \varphi(x) = l \Gamma(n+1) - l(2^n \cdot 2 \epsilon_0) - l \Gamma\left(\frac{x_M - x + 2 \epsilon_0}{2 \epsilon_0}\right) - l \Gamma\left(\frac{x_M + x + 2 \epsilon_0}{2 \epsilon_0}\right) \quad (57)$$

si en la (56) hacemos

$$a + \frac{1}{2} = n + 1$$

resulta:

$$a = n + \frac{1}{2}$$

y por lo tanto:

$$l \Gamma(n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[l \left(n + \frac{1}{2}\right) - 1 \right] + l \sqrt{2\pi} - \Omega_1 \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (58)$$

si hacemos:

$$a + \frac{1}{2} = \frac{x_M + 2\epsilon_0 - x}{2\epsilon_0}$$

resulta:

$$a = \frac{x_M + \epsilon_0 - x}{2\epsilon_0} = \frac{n+1}{2} - \frac{x}{2\epsilon_0} \quad (59)$$

y si hacemos:

$$a + \frac{1}{2} = \frac{x_M + 2\epsilon + x}{2\epsilon_0}$$

se tendrá:

$$a = \frac{x_M + \epsilon_0 + x}{2\epsilon_0} = \frac{n+1}{2} + \frac{x}{2\epsilon_0} \quad (60)$$

Y por lo tanto, la (57) se podrá escribir

$$\begin{aligned} l \varphi(x) = & \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[l \left(n + \frac{1}{2}\right) - 1 \right] - l(2^n \cdot 2\epsilon_0) - l \sqrt{2\pi} - \\ & - \left(\frac{n+1}{2} - \frac{x}{2\epsilon_0}\right) \left[l \left(\frac{n+1}{2} - \frac{x}{2\epsilon_0}\right) - 1 \right] - \\ & - \left(\frac{n+1}{2} + \frac{x}{2\epsilon_0}\right) \left[l \left(\frac{n+1}{2} + \frac{x}{2\epsilon_0}\right) - 1 \right] + R \end{aligned}$$

Siendo R la suma de las funciones Ω_1 .

Simplificando, resulta:

$$\begin{aligned}
 l\varphi(x) = & \left(n + \frac{1}{2}\right) l\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - l(2^n \cdot 2\epsilon_0) - l\sqrt{2}\pi - \\
 & - \left(\frac{n+1}{2} - \frac{x}{2\epsilon_0}\right) l\left(\frac{n+1}{2} - \frac{x}{2\epsilon_0}\right) - \left(\frac{n+1}{2} + \frac{x}{2\epsilon_0}\right) l\left(\frac{n+1}{2} + \frac{x}{2\epsilon_0}\right) + R.
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

Pero:

$$\begin{aligned}
 l\left(\frac{n+1}{2} - \frac{x}{2\epsilon_0}\right) &= l\frac{n+1}{2} \cdot \left[1 - \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}\right] = l\frac{n+1}{2} + l\left[1 - \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}\right] \\
 l\left(\frac{n+1}{2} + \frac{x}{2\epsilon_0}\right) &= l\frac{n+1}{2} \left[1 + \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}\right] = l\frac{n+1}{2} + l\left[1 + \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}\right]
 \end{aligned}
 \tag{62}$$

luego:

$$\begin{aligned}
 l\varphi(x) = & \left(n + \frac{1}{2}\right) l\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - l(2^n \cdot 2\epsilon_0 \cdot \sqrt{2}\pi) - \\
 & - \left[\left(\frac{n+1}{2} - \frac{x}{2\epsilon_0}\right) + \left(\frac{n+1}{2} + \frac{x}{2\epsilon_0}\right)\right] l\frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2} - \frac{x}{2\epsilon_0}\right) l\left[1 - \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}\right] - \\
 & - \left(\frac{n+1}{2} + \frac{x}{2\epsilon_0}\right) l\left[1 + \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}\right] + R
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

o sea:

$$\begin{aligned}
 l\varphi(x) = & \left(n + \frac{1}{2}\right) l\left(n + \frac{1}{2}\right) - (n+1) l\left(\frac{n+1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \\
 & - l(2^n \cdot 2\epsilon_0 \cdot \sqrt{2}\pi) - \left(\frac{n+1}{2} - \frac{x}{2\epsilon_0}\right) l\left[1 - \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}\right] - \\
 & - \left(\frac{n+1}{2} + \frac{x}{2\epsilon_0}\right) l\left[1 + \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}\right] + R
 \end{aligned}
 \tag{64}$$

Como R tiende a cero y,

$$l \left[1 - \frac{x}{\epsilon_0(n+1)} \right] = - \left(\frac{x}{\epsilon_0(n+1)} + \frac{x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)^2} + \frac{x^3}{3\epsilon_0^3(n+1)^3} + \frac{x^4}{4\epsilon_0^4(n+1)^4} \right) + \dots$$

$$l \left[1 + \frac{x}{\epsilon_0(n+1)} \right] = \frac{x}{\epsilon_0(n+1)} - \frac{x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)^2} + \frac{x^4}{4\epsilon_0^4(n+1)^4} - \dots$$

que son desarrollos convergentes dado que el máximo valor de x es:

$$x \leq x_M = \epsilon_0 n < \epsilon_0(n+1).$$

efectuando los productos indicados en la (64) y simplificando, resulta:

$$l \varphi(x) = \left(n + \frac{1}{2} \right) l \left(n + \frac{1}{2} \right) - (n+1) l \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} -$$

$$- l \left(2n_n \cdot 2\epsilon_0 \sqrt{2\pi} \right) - \frac{x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)} - \frac{x^4}{12\epsilon_0^4(n+1)^3} - \frac{x^6}{30\epsilon_0^6(n+1)^5} - \dots$$
(65)

Pasando a los números, resulta:

$$\varphi(x) = \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)^{n + \frac{1}{2}}}{\left(\frac{n+1}{2} \right)^{n+1}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^n \cdot 2\epsilon_0 \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)} - \frac{x^4}{12\epsilon_0^4(n+1)^3} - \dots}$$
(66)

Esta expresión puede aún simplificarse, resultando:

$$\varphi(x) = \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)^{n + \frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+1} \cdot \epsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{e}{2\pi}} e^{-(n+1)} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{e^{-2K}}{2^K (2^K - 1) \epsilon_0^{2K} (n+1)^{2K}}$$
(67)

Esta es otra forma de la función de la probabilidad de los errores de observación.

Si el número de errores elementales n es razonablemente grande, cosa que ocurre en la mayor parte de observaciones, la expresión (67) puede ser simplificada; en efecto, podemos hacer:

$$\begin{aligned} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n + \frac{1}{2}}}{(n + 1)^{n+1}} &= \sqrt[n+1]{\left[1 - \frac{1}{2(n+1)}\right]^{2(n+1)} \cdot \frac{1}{n + \frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[n+1]{\left[1 - \frac{1}{2(n+1)}\right]^{-2(n+1)} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)}} \end{aligned}$$

Pero, el valor de $\left[1 - \frac{1}{2(n+1)}\right]^{-2(n+1)}$ cuando n es grande, tiende a valer e .

Luego:

$$\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n + \frac{1}{2}}}{(n + 1)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt[n+1]{e \left(n + \frac{1}{2}\right)}}$$

y la relación (67) se podrá escribir

$$\varphi(x) = \frac{1}{\epsilon_0 \sqrt[n+1]{2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)}} e^{-(n+1)} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{x^{2K}}{2K(2K-1) \epsilon_0^{2K} (n+1)^{2K}} \quad (68)$$

Siendo n grande, no se cometerá error en despreciar el término $\frac{1}{2}$ dentro de la raíz, resultando, finalmente

$$\varphi(x) = \frac{1}{\epsilon_0 \sqrt{2\pi n}} e^{-(n+1)} \sum_{K=1}^{\infty} \left[\frac{x}{\epsilon_0 (n+1)} \right]^{2K} \frac{1}{2K(2K-1)} \quad (69)$$

que será la función de probabilidad buscada.

Como se vé, esta función contiene todas las potencias pares de x y de x_m ; el valor de x no podrá sobrepasar al de x_m , pues de lo contrario los desarrollos logarítmicos (62) no serán convergentes.

Esta función (69) comprende, como caso particular, a la función de probabilidad de Gauss (1); en efecto, si x_m puede ser infinito, como su valor es, por la relación (16)

$$x_M = \epsilon_0 n$$

es necesario que el producto de ϵ_0 por n sea infinito.

Por otra parte, según la relación (47), el momento de 2° orden M_2 cuyo valor es

$$M_2 = \epsilon_0^2 n$$

debe ser finito; ello impone la condición de ser ϵ_0 nulo y por lo tanto, n doblemente infinito para que $\epsilon_0 n = x_M$ sea infinito.

Desarrollemos la expresión (69):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0^2 n \cdot 2\pi}} e^{-\frac{(n+1)}{2\epsilon_0^2(n+1)^2} x^2 - \frac{(n+1)x^4}{12\epsilon_0^4(n+1)^3} - \dots}$$

o sea:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0^2 \cdot n \cdot 2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)} - \frac{x^4}{12\epsilon_0^4(n+1)^3} - \dots} \quad (70)$$

Si n tiende a infinito doblemente y ϵ_0 tiende a cero, resulta:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon_0 \rightarrow 0}} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{M_2 \cdot 2\pi}} \lim e^{-\frac{x^2}{2M_2} - \frac{x^4}{12M_2^3(n+1)} - \dots} \quad (71)$$

pues

$$M_2 = \epsilon_0^2 n$$

y

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon_0 \rightarrow 0}} \epsilon_0^2(n+1) = \epsilon_0^2 n = M_2.$$

Además, siendo M_2 finito y $(n+1)$ doblemente infinito, los términos siguientes a x^2 en el exponente, tenderán a cero; por lo tanto

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon_0 \rightarrow 0}} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{M_2 \cdot 2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2M_2}} \quad (72)$$

Recordando que en la fórmula de Gauss, el módulo de precisión h está vinculado al error medio cuadrático m por la relación

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$$

y como el error medio cuadrático m es la raíz cuadrada del momento de segundo orden M_2 resulta que:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2 M_2}}$$

y

$$h^2 = \frac{1}{2 M_2}$$

luego, la (71) se transforma en

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \epsilon_0 \rightarrow 0}} \varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$$

que es la fórmula de Gauss, caso particular de la fórmula (69) y válida únicamente para el caso en que el error máximo es infinito.

Consideremos la expresión (70), donde despreciaremos en el exponente, la unidad que se suma al número n :

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0^2 n \cdot 2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon_0^2 n} - \frac{x^4}{12\epsilon_0^4 n^3} - \frac{x^6}{20\epsilon_0^6 n^5} - \dots} \quad (73)$$

y calculemos las probabilidades correspondientes a los errores $x_1, x_2, \dots, x_r$, reemplazando $\epsilon_0^2 n$ por su igual M_2 :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi M_2}} e^{-\frac{x_1^2}{2M_2} - \frac{x_1^4}{12M_2^3 n} - \frac{x_1^6}{30M_2^5 n^2} - \dots} \\ &\dots\dots\dots (74) \\ \varphi(x_r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi M_2}} e^{-\frac{x_r^2}{2M_2} - \frac{x_r^4}{12M_2^3 n} - \frac{x_r^6}{30M_2^5 n^2} - \dots} \end{aligned}$$

La probabilidad del conjunto de errores, será la compuesta, obtenida por el producto de todas las probabilidades simples:

$$P(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi M_2}} \right)^r e^{-\frac{\sum x_i^2}{2 M_2} - \frac{\sum x_i^4}{12 M_2^3 n} - \frac{\sum x_i^6}{30 M_2^5 n^2} - \dots} \quad (75)$$

para que esta probabilidad sea máxima, el exponente de e debe ser mínimo:

$$\frac{\sum x_i^2}{2 M_2} + \frac{\sum x_i^4}{12 M_2^3 n} + \frac{\sum x_i^6}{30 M_2^5 n^2} + \dots = \text{mínimo}. \quad (76)$$

Esta será la condición rigurosa que deben cumplir los errores x_i para que su probabilidad sea máxima; si en esta relación hacemos n igual a infinito, nos queda:

$$\frac{\sum x_i^2}{2 M_2} = \text{mínimo}.$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum x_i^2 = \text{mínimo}.$$

que es el fundamento de Gauss del método de los mínimos cuadrados.

La expresión (76) demuestra que, cuando Gauss expresó que debía ser mínima la suma de las potencias pares y no solo la de los cuadrados, no estaba lejos de la verdad.

Consideremos la expresión (73), y hagamos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \epsilon_0^2 n}} = \varphi(0) \quad (77)$$

tomando logaritmos, resulta:

$$l\varphi(x) = l\varphi(0) - \left[\frac{x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)} + \frac{x^4}{12\epsilon_0^4(n+1)^3} + \frac{x^6}{30\epsilon_0^6(n+1)^5} + \dots \right] \quad (78)$$

Si hacemos

$$F(x) = - \left[\frac{x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)} + \frac{x^4}{12\epsilon_0^4(n+1)^3} + \frac{x^6}{30\epsilon_0^6(n+1)^5} + \dots \right] \quad (79)$$

se tendrá:

$$l \varphi(x) = l \varphi(0) + F(x) \quad (80)$$

Derivando con respecto a x , resulta:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = F'(x) = - \left[\frac{x}{\epsilon_0^2(n+1)} + \frac{x^3}{3\epsilon_0^4(n+1)^3} + \frac{x^5}{5\epsilon_0^6(n+1)^5} + \dots \right]$$

y también

$$F'(x) = - \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \frac{x}{\epsilon_0(n+1)} + \frac{1}{3} \left[\frac{x}{\epsilon_0(n+1)} \right]^3 + \frac{1}{5} \left[\frac{x}{\epsilon_0(n+1)} \right]^5 + \dots \right\} \quad (81)$$

Recordando que, para $\frac{x}{\epsilon_0(n+1)} < 1$ o sea, para todo $x < \epsilon_0(n+1)$ son válidos los desarrollos:

$$l \left[1 - \frac{x}{\epsilon_0(n+1)} \right] = - \left[\frac{x}{\epsilon_0(n+1)} + \frac{x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)^2} + \frac{x^3}{3\epsilon_0^3(n+1)^3} + \dots \right]$$

$$l \left[1 + \frac{x}{\epsilon_0(n+1)} \right] = \frac{x}{\epsilon_0(n+1)} - \frac{x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)^2} + \frac{x^3}{3\epsilon_0^3(n+1)^3} - \dots$$

se tendrá:

$$l \left[1 - \frac{x}{\epsilon_0(n+1)} \right] - l \left[1 + \frac{x}{\epsilon_0(n+1)} \right] = - \left\{ \frac{2x}{\epsilon_0(n+1)} + \frac{2}{3} \left[\frac{x}{\epsilon_0(n+1)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{5} \left[\frac{x}{\epsilon_0(n+1)} \right]^5 + \dots \right\} \quad (82)$$

o sea, comparando las relaciones (81) y (82),

$$F'(x) = \frac{1}{2\epsilon_0} l \frac{1 - \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}}{1 + \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}} = \frac{1}{2\epsilon_0} l \frac{\epsilon_0(n+1) - x}{\epsilon_0(n+1) + x} \quad (83)$$

Luego:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{2\epsilon_0} l \frac{\epsilon_0(n+1) - x}{\epsilon_0(n+1) + x}.$$

De esto resulta:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \frac{1}{2\epsilon_0} \left\{ l[\epsilon_0(n+1) - x] - l[\epsilon_0(n+1) + x] \right\} dx. \quad (84)$$

que, integrada entre 0 y x nos dá:

$$l \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} = -l[\epsilon_0(n+1) - x] \frac{\epsilon_0(n+1) - x}{2\epsilon_0} - l[\epsilon_0(n+1) + x] \frac{\epsilon_0(n+1) + x}{2\epsilon_0} + \\ + l[\epsilon_0(n+1)]^{n+1} \quad (85)$$

Pasando a los antilogaritmos, resulta:

$$\varphi(x) = \varphi(0) \frac{[\epsilon_0(n+1)]^{n+1}}{[\epsilon_0(n+1) - x] \frac{\epsilon_0(n+1) - x}{2\epsilon_0} [\epsilon_0(n+1) + x] \frac{\epsilon_0(n+1) + x}{2\epsilon_0}} \quad (86)$$

que será otra forma de la función de la probabilidad, que también podrá escribirse:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon_0^2 n}} \left[\frac{\epsilon_0(n+1) - x}{\epsilon_0(n+1) + x} \right]^{\frac{x}{2\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\epsilon_0^2(n+1)^2 - x^2}{\epsilon_0^2(n+1)^2} \right]^{\frac{n+1}{2}}} \quad (87)$$

o bien:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon_0^2 n}} \left[\frac{1 - \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}}{1 + \frac{x}{\epsilon_0(n+1)}} \right]^{\frac{x}{2\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\left\{ 1 - \left[\frac{x}{\epsilon_0(n+1)} \right]^2 \right\}^{\frac{n+1}{2}}} \quad (88)$$

Estas expresiones serán válidas para todo valor de x menor que $\epsilon_0(n+1)$ es decir, desde 0 hasta $x = \epsilon_0 n$.

Para poder calcular la probabilidad $\varphi(x)$ de desvíos o de errores será necesario determinar, en base al conjunto de desvíos o errores, los valores de ϵ_0 y n .

Las expresiones (51), (52) y (53) se podrán utilizar cuando el número de mediciones es muy grande; de lo contrario, se obtendrán valores erróneos.

Es preferible, en la práctica, determinar los valores más probables de ϵ_0 y n ; para ello, consideremos una serie de r errores, siendo la pro-

babilidad de cada uno de ellos, la que expresa la relación (67)

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{e}{2\pi}} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n + \frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+1}} \cdot e^{-(n+1) \sum_{K=1}^{\infty} \frac{x^{2K}}{2K(2K-1)\epsilon_0^{2K}(n+1)^{2K}}}$$

La probabilidad del conjunto, será el producto de las probabilidades simples, o sea, desarrollando el exponente y operando:

$$P = \left(\sqrt{\frac{e}{2\pi}}\right)^r \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{r\left(n + \frac{1}{2}\right)}}{(n+1)^{r(n+1)}} \cdot e^{-\frac{\sum x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)} - \frac{\sum x^4}{12\epsilon_0^4(n+1)^3} - \dots} \quad (89)$$

Tomando logaritmos, resulta:

$$\begin{aligned} lP = & l\left(\sqrt{\frac{e}{2\pi}}\right)^r + r\left(n + \frac{1}{2}\right)l\left(n + \frac{1}{2}\right) - r(n+1)l(n+1) - l\epsilon_0 - \\ & - \frac{\sum x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)} - \frac{\sum x^4}{\epsilon_0^4(12n+1)^3} - \frac{\sum x^6}{30\epsilon_0^6(n+1)^5} - \dots \quad (90) \end{aligned}$$

Las derivadas de esta expresión, respecto de ϵ_0 y n deben ser nulas:

$$\begin{aligned} 0 = & r l\left(n + \frac{1}{2}\right) + r - r l(n+1) - r + \frac{\sum x^2}{2\epsilon_0^2(n+1)^2} + \\ & + \frac{\sum x^4}{4\epsilon_0^4(n+1)^4} + \frac{\sum x^6}{6\epsilon_0^6(n+1)^6} + \dots \quad (91) \end{aligned}$$

que es la derivada con respecto a n ; simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} l\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} = & \frac{1}{2\epsilon_0^2(n+1)^2} \frac{\sum x^2}{r} + \frac{1}{4\epsilon_0^4(n+1)^4} \frac{\sum x^4}{r} + \\ & + \frac{1}{6\epsilon_0^6(n+1)^6} \frac{\sum x^6}{r} + \dots \end{aligned}$$

recordando que:

$$\frac{\sum x^2}{r} = M_2; \quad \frac{\sum x^4}{r} = M_4; \quad \frac{\sum x^6}{r} = M_6 \dots \quad (92)$$

resulta:

$$l \frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \epsilon_0^2 (n+1)^2} M_2 + \frac{1}{4 \epsilon_0^4 (n+1)^4} M_4 + \\ + \frac{1}{6 \epsilon_0^6 (n+1)^6} M_6 + \dots \quad (93)$$

Derivando la (90) respecto a ϵ_0 , se obtiene:

$$o = -\frac{r}{\epsilon_0} + \frac{\Sigma x^2}{\epsilon_0^3 (n+1)} + \frac{\Sigma x^4}{3 \epsilon_0^5 (n+1)^3} + \frac{\Sigma x^6}{5 \epsilon_0^7 (n+1)^5} + \dots$$

que simplificando y recordando las relaciones (92), resulta ser:

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{\epsilon_0^2 (n+1)^2} M_2 + \frac{1}{3 \epsilon_0^4 (n+1)^4} M_4 + \frac{1}{5 \epsilon_0^6 (n+1)^6} M_6 + \dots \quad (94)$$

Hagamos:

$$E = \epsilon_0 (n+1) \quad (95)$$

y desarrollando $l \frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} = l \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}}$ en serie, resulta, conservando sólo

dos términos:

$$\frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} = \frac{M_2}{2E^2} + \frac{M_4}{4E^4} + \frac{M_6}{6E^6} + \dots \quad (96)$$

Por ser $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \dots$, tomando sólo dos términos, la (94)

resulta:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{M_2}{E^2} + \frac{M_4}{3E^4} + \frac{M_6}{5E^6} + \dots \quad (97)$$

Simplificando la (96) se obtiene:

$$\frac{1}{n} - \frac{3}{4n^2} = \frac{M_2}{E^2} + \frac{M_4}{2E^4} + \frac{M_6}{3E^6} + \dots \quad (98)$$

Conservando sólo dos términos de los desarrollos (97) y (96), y restando la 1ª de la 2ª, resulta:

$$\frac{M_4}{6 E^4} = \frac{1}{4 n^2} \quad (99)$$

Multiplicando la (97) por 3 y la (98) por 2, y restando, se obtiene:

$$\frac{M_2}{E^2} = \frac{1}{n} - \frac{3}{3 n^2} = \frac{2 n - 3}{2 n^2} \quad (100)$$

de la (99) se obtiene:

$$E^4 = \frac{4 n^2 M_4}{6}$$

o sea:

$$E^2 = n \sqrt{\frac{2}{3} M_4} \quad (101)$$

de la (100), resulta:

$$E^2 = \frac{2 n^2 M_2}{2 n - 3} \quad (102)$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{2 n^2 M_2}{2 n - 3} = n \sqrt{\frac{2}{3} M_4} \quad (103)$$

de donde:

$$n = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} M_4}}{\sqrt{\frac{2}{3} M_4} - M_2} \quad (104)$$

que nos da el número de errores elementales n .

De la (101), recordando la (95), resulta:

$$\epsilon_0^2 (n + 1)^2 = n \sqrt{\frac{2}{3} M_4}$$

o sea:

$$\epsilon_0 = \frac{\sqrt{n \sqrt{\frac{2}{3} M_4}}}{n + 1} \quad (105)$$

expresión que nos da el valor del error elemental ϵ_0 .

El error máximo, se obtendrá con la relación:

$$x_M = \epsilon_0 n. \quad (106)$$

El valor de n , dado por la relación (104), deberá redondearse al entero más próximo.

Consideremos, a título de ejemplo, el siguiente conjunto de desvíos:

V	V ²	V ⁴
0,59	0,3481	0,12117361
0,45	0,2025	0,04100625
0,40	0,1600	0,02560000
0,33	0,1089	0,01185921
0,29	0,0841	0,00707281
0,26	0,0676	0,00456976
0,18	0,0324	0,00104976
0,11	0,0121	0,00014641
0,09	0,0081	0,00006561
0,04	0,0016	0,00000256
—0,01	0,0001	0,00000001
—0,03	0,0009	0,00000081
—0,07	0,0049	0,00002401
—0,12	0,0144	0,00020736
—0,19	0,0361	0,00130321
—0,24	0,0576	0,00331776
—0,27	0,0729	0,00531441
—0,31	0,0961	0,00923521
—0,39	0,1521	0,02313441
—0,47	0,2209	0,04879681
—0,56	0,3136	0,09834496
	1,9950	0,40222494

$$r = 21$$

$$M^2 = 0,09975$$

$$M^4 = 0,02112$$

Aplicando las relaciones

$$E_2 = \frac{\sum v^2}{r-1} \quad y \quad M_4 = \frac{\sum v^4}{r-1} \cdot \frac{r}{r-1}.$$

obtendremos los momentos de 2º y 4º orden de los errores verdaderos, en función de los desvíos.

Con la relación (104), se obtiene:

$$n = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \cdot x \, 0,02112}}{\sqrt{\frac{2}{3} \cdot 0,02112 - 0,09975}} = 9,78 \pm 10$$

Con la (105) resulta:

$$\epsilon_0 = \frac{\sqrt{10 \cdot 0,1158}}{11} = 0,098$$

El error máximo dado por la (106), es

$$x_M = \epsilon_0 n = 0,980$$

Si calculamos el error medio

$$m = \sqrt{\frac{\sum v^2}{r-1}} = 0,316$$

que, multiplicado por 3 nos da, aproximadamente, el desvío máximo, resulta:

$$v_M = 3m = 0,948$$

que es muy próximo al error hallado.

El valor $x_M = \epsilon_0 n$ es el error máximo admisible; para hallar el desvío máximo V_M , recordaremos que

$$V = x \sqrt{\frac{r-1}{r}} \quad (107)$$

siendo V el desvío y x el error verdadero.

Para nuestro caso, $r = 21$, resulta:

$$V_M = x_M \sqrt{\frac{20}{21}} = 0,957$$

Este valor del desvío máximo nos permitirá eliminar de la serie, aquel desvío que, por sobrepasarlo, se deba considerar anormal.

Como se observa, este valor se aproxima más al del desvío máximo dado por la relación

$$x_M = 3m = 0,948$$

Conocido los valores de ϵ_0 y n se podrá aplicar cualquiera de las funciones de probabilidad halladas; pero como estas funciones expresan la probabilidad de los errores verdaderos, si se quiere ponerlas en función de los desvíos habrá que expresar éstos en base a los errores verdaderos mediante la relación

$$x = v \sqrt{\frac{r}{r-1}} \quad (108)$$

o bien

$$v = x \sqrt{\frac{r-1}{r}} \quad (109)$$

Para calcular la probabilidad elemental $\varphi(v) dv$, será necesario multiplicar $\varphi(v)$ por el desvío diferencial dv , que se obtendrá de la (108)

$$dx = dv \sqrt{\frac{r}{r-1}} \quad (110)$$

La probabilidad elemental, será:

$$\varphi(v) dv = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{\left(n + \frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{e}{2\pi}}}{(n+1)^{(n+1)} \epsilon_0 \sqrt{\frac{r-1}{r}}} e^{-(n+1)} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\left(v \sqrt{\frac{r}{r-1}}\right)^{2K}}{2K(2K-1) \epsilon_0^{2K} (n+1)^{2K}} \quad (111)$$

Para el caso estudiado, en que:

$$n = 11 \quad ; \quad n + 1 = 12.$$

$$\epsilon_0 = 0,094$$

$$r = 21 \quad ; \quad \sqrt{\frac{r}{r-1}} = 1,024$$

$$\sqrt{\frac{r-1}{r}} = 0,9766$$

la probabilidad elemental será:

$$\varphi(v) dv = 1,2678 \cdot e^{-4,9446 v^2 - 0,67914 v^4 - 0,2239 v^6 - \dots} dv. \quad (112)$$

La función de Gauss, para el mismo caso, resulta ser:

$$\varphi(v) dv = 1,2624 e^{-5,0072 v^2} \cdot dv. \quad (113)$$

Como se ve, la función (112), para $V = 0$, da

$$\varphi(0) = 1,2678$$

mientras que (113) da

$$\varphi(0) = 1,2624$$

menor que la anterior; esto es lógico, ya que la función de Gauss, al extenderse entre $-\infty$ y $+\infty$ debe tener ordenadas menores que las correspondientes a la nueva función.

Calcularemos un nuevo ejemplo, con la siguiente serie de desvíos:

V	V ²	V ⁴
—0,23	0,0529	0,00279841
0,23	0,0529	0,00279841
0,01	0,0001	0,00000001
—0,01	0,0001	0,00000001
—0,35	0,1225	0,01500625
0,36	0,1296	0,01679616
0,29	0,0841	0,00707281
0,08	0,0064	0,00004096
—0,37	0,1369	0,01874161
0,02	0,0004	0,00000016
—0,02	0,0004	0,00000016
—0,35	0,1225	0,01500625
0,35	0,1225	0,01500625

V	V ²	V ⁴
0,17	0,0289	0,00083521
—0,18	0,0324	0,00104976
0,32	0,1024	0,01048576
—0,32	0,1024	0,01048576
—0,06	0,0036	0,00001296
0,05	0,0025	0,00000625
—0,08	0,0064	0,00004096
0,07	0,0049	0,00002401
—0,29	0,0841	0,00707281
0,29	0,0841	0,00707281
—0,08	0,0064	0,00004096
0,09	0,0081	0,00006561

V	V ²	V ³
—0,13	0,0169	0,00028561
0,13	0,0169	0,00028561
0,24	0,0576	0,00331776
—0,23	0,0529	0,00279841
—0,24	0,0576	0,00331776
0,25	0,0625	0,00390625
—0,19	0,0361	0,00130321
0,18	0,0324	0,00104976
—0,22	0,0484	0,00234256
0,23	0,0529	0,00279841
0,12	0,0144	0,00020736
—0,22	0,0484	0,00234256
0,09	0,0081	0,00006561
—0,03	0,0009	0,00000081
0,03	0,0009	0,00000081
—0,10	0,0100	0,00010000
0,09	0,0081	0,00006561
0,14	0,0196	0,00038416
—0,15	0,0225	0,00050625
—0,19	0,0361	0,00130321
0,28	0,0784	0,00614656
—0,09	0,0081	0,00006561
0,15	0,0225	0,00050625
—0,14	0,0196	0,00038416
0,14	0,0196	0,00038416
—0,14	0,0196	0,00038416
0,19	0,0361	0,00130321
0,30	0,0900	0,00810000
—0,49	0,2401	0,05764801

V	V ²	V ³
—0,14	0,0196	0,00038416
0,15	0,0225	0,00050625
—0,31	0,0961	0,00923521
—0,35	0,0324	0,01500625
0,18	0,1225	0,00104976
0,37	0,1369	0,01874161
0,13	0,0169	0,00028561
0,46	0,2116	0,04477456
—0,46	0,2116	0,04477456
—0,15	0,0225	0,00050625
0,14	0,0196	0,00038416
0,08	0,0064	0,00004096
—0,08	0,0064	0,00004096
0,21	0,0441	0,00194481
—0,21	0,0441	0,00194481
0,13	0,0169	0,00028561
0,17	0,0289	0,00083521
—0,29	0,0841	0,00707281
—0,15	0,0225	0,00050625
—0,15	0,0225	0,00050625

$$\Sigma_a^z = 3,6228$$

$$\Sigma_a^v = 0,38059020$$

$$M_x = 0,049627$$

$$M_4 = 0,005285$$

$$r = 74$$

Aplicando las relaciones (104), (105) y (106), resulta:

$$n = 9$$

$$\epsilon_0 = 0,0735$$

$$x_M = 0,662$$

El error medio cuadrático será

$$m = \sqrt{\epsilon_0 n} = 0,218$$

El error medio obtenido con la suma de los cuadrados de los desvíos es

$$m' = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}} = 0,222$$

Si aplicamos la relación

$$x'_M = 3 m'$$

para obtener el desvío máximo, se tendrá:

$$x'_M = 0,665$$

valor muy próximo al hallado para x_M .

Es evidente que las relaciones (104) y (105) son solo aproximadas, ya que se despreciaron numerosos términos; para los valores que ellas proporcionan, son suficientemente exactos para los fines prácticos.

El error máximo x_M , transformado en desvío máximo por la relación (109)

$$v_M = x_M \sqrt{\frac{r-1}{r}} = 0,657$$

permitirá eliminar observaciones anormales.

IMPRESO EN LOS TALLERES GRAFICOS
DEL INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR
BUENOS AIRES 31 - V - 1945
500 EJ. - 1ª. Edición

LAS PUBLICACIONES DEL INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR

se hallan en venta al público en general en la Sección Ventas, Avenida Ingeniero Huergo 251, 1er. Subsuelo, T. A.: 34-5957.

Informes generales: se solicitan en el Instituto Geográfico Militar (Sección Biblioteca y Publicaciones), Avenida Cabildo 381, T. A.: 76-3031, Interno 12.

A — Libros y Folletos

Para mayores datos pídase el Catálogo de Publicaciones Técnico-científicas.

La serie "Publicaciones Técnicas" (antes "geodésicas"), a que pertenece el presente folleto, se compone de:

Nº 1 — Tabla de coordenadas planas Gauss-Krüger de las esquinas de la cuadrícula 5' en 5' entre las latitudes 21° y 56°, 1940	\$ 6.00
Nº 2 — Tabla de radios de curvatura y arcos de meridiano y paralelos entre las latitudes 21° y 56° (Elipsoide de Referencia Internacional), 1941	„ 2.50
Nº 3 — El problema de la medición de bases geodésicas, 1941	„ 5.10
Nº 4 — Contraste de miras para nivelación de alta precisión y determinación de sus dilataciones térmicas, 1944	„ 3.00
Nº 5 — Precisión del primer lado de una triangulación a través de una red de ampliación rómbica simple y prueba de la ecuación lateral, 1948 (2ª Edición)	„ 1.20
Nº 6 — Nivelación general del país. Tomo primero: Registro provisional de cotas. Tomo segundo: Gráficos, 1945.	„ 9.00 rústica encuader. „ 12.00
Nº 7 — Fórmulas para el cálculo a máquina de triangulaciones de enlace y problema de la Carta, 1946.	„ 1.50
Nº 8 — Resoluciones sobre nivelación de alta precisión tomadas en los últimos congresos geodésicos, 1946 (agotada)	„ 3.50
Nº 9 — Coordenadas planas rectangulares Gauss-Krüger, nuevas fórmulas y tablas para cálculo con máquina, 1946	„ 1.35
Nº 10 — Símbolos y notaciones técnicas, 1946	„ 0.50
Nº 11 — Métodos de Compensación de la Triangulación Fundamental	„ 8.00
Nº 12 — El teorema de Schreiber de la distribución más favorable de los pesos en las redes de ampliación de las bases geodésicas	„ 5.60
Nº 13 — Generalización de la Ley de Probabilidad de los Errores de Observación	„ 5.30

B — Cartas y Mapas

Para ilustrarse sobre las hojas aparecidas y sus precios, solicítase el Catálogo del Material Cartográfico. (Precio \$ 0.75).

Exercício de Vota § 5.10