

EJERCITO ARGENTINO



DIRECCION GENERAL
DEL
INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR



DIVULGACION DE CARACTER TECNICO PARA CONOCIMIENTO DE SU PERSONAL

FOLLETO No. 4

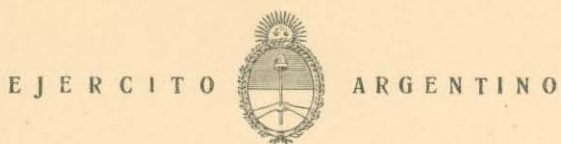
LA REFRACCION NIVELITICA

por T. J. Kukkamäki

BUENOS AIRES

1946

LA REFRACCION NIVELITICA



EJERCITO ARGENTINO

DIRECCION GENERAL
DEL
INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR



DIVULGACION DE CARACTER TECNICO PARA CONOCIMIENTO DE SU PERSONAL

FOLLETO No. 4

LA REFRACCION NIVELITICA

por T. J. Kukkamäki

BUENOS AIRES

1946

Es propiedad del Instituto Geográfico Militar
Ley 11723

INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR

Buenos Aires, 19 de julio de 1945.

Disposición Permanente N°. 370

Visto lo propuesto por la Dirección del Servicio Geográfico y considerando conveniente estimular entre el personal técnico de la Gran Repartición el ambiente de investigación y estudio que es característico de los grandes institutos geodésico - cartográficos,

El Director General—

DISPONE:

1º Procédase a la publicación periódica de folletos tendientes a la divulgación de métodos de trabajo, investigaciones y estudios relacionados con la ciencia geográfica.

2º La Dirección del Servicio Geográfico tendrá a su cargo la elección de los temas y la revisión técnica de las traducciones, las que serán efectuadas con el personal de traductores del Instituto.

3º Las publicaciones a que se hace mención en la presente Disposición están destinadas a uso exclusivo del personal técnico de la Gran Repartición.

4º La Dirección del Servicio Técnico procederá a imprimir de cada folleto 750 (setecientos cincuenta) ejemplares que serán entregados a la Dirección del Servicio Geográfico para su distribución gratuita.

5º Para conocimiento general, dése en la Disposición Permanente respectiva y archívese en la División Central.

OTTO H. HELBLING
General de Brigada
Director General

PROLOGO

La evaluación de la precisión de un método de nivelación, ha sido profundamente examinada en los últimos congresos de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, habiéndose establecido nuevas fórmulas, a fin de apreciar en mejor forma tal precisión.

Por otra parte, los reducidos límites de tolerancia establecidos para la nivelación de alta precisión, imponen la necesidad de eliminar toda fuente posible de error, ya sea, mediante los métodos operativos en campaña o por el cálculo de la influencia que un determinado error pueda tener sobre los desniveles medidos. En este último caso se encuentra, precisamente, la influencia de la denominada refracción nivelítica sobre las mencionadas nivelaciones.

El presente trabajo de divulgación, es una traducción del interesante y muy valioso estudio del destacado geodesta finés Dr. T. J. Kukkamäki, intitulado "*Ueber die Nivellitische Refraktion*", publicación N° 25 del Instituto Geodésico de Finlandia, el que ha de contribuir a difundir entre nosotros el conocimiento de tan importante fenómeno de refracción, cuya influencia en nuestros trabajos de nivelación en regiones montañosas debe, necesariamente, ser analizada con todo detenimiento.

OTTO H. HELBLING

General de Brigada

Director General del Instituto Geográfico Militar

INDICE

	Pág.
Introducción.	11
Relaciones microclimáticas de las capas más bajas del aire...	12
Temperatura.	13
Humedad.	23
Contenido de ácido carbónico del aire.....	24
Presión atmosférica.	25
Deducción de las fórmulas.....	27
Coefficiente de refracción del aire.....	27
Refracción nivelítica.	29
Ensayos en una estación del instrumento.....	35
Ejecución de las observaciones.....	35
Elaboración de las observaciones.....	37
Evaluación de los resultados.....	42
Ensayos en un trayecto de 1958 m.....	43
Ejecución de las observaciones.....	43
Elaboración de las observaciones.....	44
Evaluación de los resultados.....	48
Influencia de la refracción nivelítica sobre el trabajo común en campana.	51
Consideraciones generales.....	51
Refracción nivelítica en la antigua nivelación fundamental de Finlandia.	52
Resumen.	59

INTRODUCCION

A pesar de que la refracción del aire cercano al suelo tiene gran influencia sobre la nivelación, hasta la fecha ha sido muy poco estudiada. Durante las últimas décadas las investigaciones de este fenómeno, que en lo sucesivo denominaremos **refracción nivelítica**, han llegado a ser necesarias, ya que los instrumentos de nivelación se han perfeccionado en tal forma, que la refracción nivelítica establece un límite para el aumento de la precisión de la nivelación.

De las pocas investigaciones teóricas sobre la refracción nivelítica debe mencionarse en primer término el trabajo extraordinariamente detallado de *Lallemand* ⁽¹⁾, pero la ecuación empleada por él para el gradiente de temperatura cercano al suelo es anticuada. Esto también ocurre con las ecuaciones de temperatura de *Hugershoff* ⁽²⁾ y *Kohlmüller* ⁽³⁾.

Existen muy pocas investigaciones experimentales sobre este tema. Por sugestión de la Comisión Geodésica del Báltico se han ejecutado algunos trabajos al respecto. En la 7ª Asamblea de dicha Comisión en Moscú, *Seidel* ⁽⁴⁾ presentó un informe sobre el polígono de nivelación cerrado alrededor del Mar Báltico, en el que daba algunas directivas para la investigación de la refracción nivelítica.

(1) *Ch. Lallemand*: Note sur l'erreur de réfraction dans le nivellement géométrique, Compt. rend. 123, 297, 1896; Verh. d. perman. Komm. d. Intern. Erdm. in Lausanne 1896, S. 247-276.

(2) *Hugershoff*: Der Zustand der Atmosphäre als Fehlerquelle im Nivellement, Diss. Dresden 1907.

(3) *Kohlmüller*: Zur Refraktion im Nivellement, Diss. München 1912.

(4) *Fr. Seidel*: Referat über das geschlossene Präzisionsnivellement rings um die Ostsee, Verh. d. Balt. Geod. Komm., 7. Tagung in Leningrad und Moskau 1934, S. 47, Helsinki 1935.

Empero, su afirmación de que en las mediciones durante las primeras horas de la mañana y las últimas de la tarde la influencia de la refracción es grande, mientras que en las efectuadas durante las restantes horas del día es menor, parece basarse en un error. Quizá haya habido una confusión entre la refracción nivelítica y la terrestre, ya que ésta presenta las cualidades mencionadas, mientras que la refracción nivelítica se comporta en forma completamente distinta.

Esta errónea interpretación de la refracción nivelítica y terrestre ha tenido amplia difusión, lo que resalta de la reglamentación para nivelaciones en los Estados Unidos (1), de la que citamos lo siguiente: "El error de refracción (en pendientes) en un día claro será un mínimo durante algunas horas del mediodía, cuando las temperaturas del aire y de la superficie del suelo son aproximadamente iguales, y un máximo al amanecer y al atardecer, pero con signos opuestos durante estos dos períodos".

A causa de la situación arriba mencionada nos hemos ocupado de la presente investigación. En las páginas siguientes deduciremos nuevas fórmulas para la refracción nivelítica, teniendo en cuenta la ecuación más reciente del gradiente de temperatura. Luego examinaremos dichas fórmulas en base a ciertas mediciones experimentales y, finalmente, aplicaremos la corrección por refracción nivelítica a una nivelación terrestre.

Relaciones microclimáticas de las capas más bajas del aire

Para llegar a una correcta comprensión del problema de la refracción nivelítica, es menester conocer las condiciones microclimáticas en las capas más bajas de la atmósfera y, como nuestro trabajo se refiere únicamente a la nivelación, investigaremos aquella parte de la atmósfera que en este caso nos interesa, es decir, la que se encuentra a menos de 3 m de altura sobre el suelo. A continuación consideraremos los factores que influyen sobre la refracción del aire, a saber: la temperatura, la humedad, el contenido de ácido carbónico y la presión. Otras circunstancias, como la variabilidad de la relación recíproca del oxígeno, nitrógeno y de los gases perfectos tienen una influencia muy pequeña y, por consiguiente, pueden, sin más, despreciarse. Las partículas de polvo y gotas de agua

(1) *Henry G. Avers: Manual of First-Order Levelling, Spec. Publ. of Coast and Geodetic Survey N° 140 - Washington 1929.*

existentes en el aire pueden muy bien ser causas de la difracción, pero nunca de la refracción.

Temperatura. La intensidad de la irradiación solar durante todo el día y durante la noche varía considerablemente. Como el suelo opaco y tosco tiene una capacidad de absorción mucho mayor que el aire, resulta más caliente que éste durante la absorción y más frío durante la irradiación. Esto tiene casi siempre como consecuencia diferencias de temperatura entre las capas de aire a diversas alturas en la cercanía del suelo. La marcha diaria de estas diferencias es a grandes rasgos la siguiente: durante la noche el suelo emisor es más frío que el aire y la temperatura de éste aumenta con la altura, o, en otras palabras, el gradiente de temperatura vertical es positivo. Cerca de la salida del sol el gradiente disminuye y 1—2 h después de la misma es igual a cero. De día, durante la absorción, el gradiente tiene un valor negativo. El mínimo se encuentra cerca de mediodía, después de lo cual disminuye el valor absoluto del gradiente, siendo 1—2 h antes de la puesta del sol nuevamente igual o cero. Alcanza luego muy pronto su valor máximo positivo, el que mantiene casi en forma invariable durante toda la noche.

El valor absoluto del gradiente depende todavía, dentro de amplios límites, de las condiciones atmosféricas, especialmente de las nubes. Con el cielo completamente nublado el gradiente es sólo del 10 al 50 % del valor medio mensual para la correspondiente hora del día, mientras que con tiempo claro el gradiente puede sobrepasar dicho valor en un 100 % (1).

También las diversidades del lugar de observación, principalmente la clase y forma de la superficie terrestre, causan ciertas oscilaciones en la temperatura, las que a menudo son muy considerables.

De día, cuando predomina el gradiente negativo, las capas inferiores del aire son más calientes y por lo tanto más livianas que las superiores. Las capas de aire tienden a establecer el equilibrio, principalmente mediante corrientes de aire turbulentas que oscilan rápidamente. Las pequeñas oscilaciones de la temperatura de algunos décimos de grados Celsius, así originadas, modifican el coeficiente de refracción del aire en forma irregular y causan el salto de la imagen en el campo visual del anteojo. Este fenómeno se denomina **vibración**. Estas oscilaciones de temperatura, y por consiguiente también la vibración, son

(1) N. K. Johnsson: A study of the vertical gradient of temperature in the atmosphere near the ground, *Geophysical Memoirs* N° 46, 1929 y A. C. Best: Transfer of heat and momentum in the lowest layers of the atmosphere, *Geophysical Memoirs* N° 65, 1935.

tanto mayores, cuanto mayor es el valor absoluto del gradiente de temperatura.

La vibración es de carácter enteramente accidental y por lo tanto no puede ocasionar un error sistemático. Como en este caso el período de las oscilaciones únicamente es de un segundo o aun menor, puede bisectarse con relativa seguridad la posición media de la imagen, la que se mueve con suma rapidez, siempre que la vibración no sea demasiado fuerte. Cuando el gradiente es grande, la amplitud de la vibración es tan grande, que la bisección ya no es segura. La vibración decrece rápidamente con la distancia visual, pudiendo ser evitada acortando dicha distancia. Empero esto no es recomendable más allá de cierto límite, ya que el aumento de trabajo y del número de estacionamientos del instrumento originan factores económicos y técnicos que tornan desventajosa la continuación del trabajo en tales condiciones.

La situación cambia completamente en aquellas horas del día en que el gradiente de temperatura es positivo, en cuyo caso existe un equilibrio estático entre las capas de aire que tienen diferente temperatura. En el intercambio de temperatura la mezcla dinámica producida por el viento representa un papel de mayor importancia que la corriente turbulenta. Esto tiene como consecuencia, que en lugar de la corriente turbulenta predomina la corriente laminar, la que tiene influencia perjudicial. Las oscilaciones de temperatura ocasionadas por esta causa son mucho más lentas que las consideradas anteriormente y su período llega a algunos minutos. Bajo estas condiciones se origina una lenta variación de la posición de la imagen, la que para distinguirla de la vibración denominaremos **fluctuación** de la imagen. En el trabajo de campaña difícilmente se lo percibe, ya que aparentemente la imagen es clara e inmóvil y el traslado de la imagen recién se hace notar después de más de diez segundos y a veces de minutos. En las primeras horas de la mañana, con calma y cielo despejado, hemos notado desplazamientos de la bisección de 7 mm para visuales de 100 m y de 1 mm para las de 50 m, causados por la fluctuación de la imagen.

Después de estas consideraciones de orden general investigaremos detenidamente la marcha de la temperatura hasta algunos metros encima del suelo.

No es posible fijar una ley determinada, y sólo existen algunas fórmulas de interpolación, las que en forma más o menos buena coinciden con la marcha real de la temperatura. Siempre que se ha tratado de explicar la influencia de la refracción cercana al suelo sobre la nivelación, se han empleado estas fórmulas. *Lalle-*

mand ⁽¹⁾ ha expresado la relación entre la temperatura (t) y la altura (z) sobre la superficie terrestre por la ecuación logarítmica

$$t = a + b \log (z + c)$$

en la que a , b y c son constantes. La forma cuadrática

$$t = a + bz^2$$

ha sido elegida por *Hugershoff* ⁽²⁾. Esta fórmula fué transformada por *Kohlmüller* ⁽³⁾ en la ecuación

$$t = a + bz + cz^2.$$

En base a estas ecuaciones de temperatura la investigación microclimática ha desarrollado sus métodos de medición y en especial aumentado la precisión.

Actualmente se emplea, exclusivamente, la fórmula

$$t = a + bz^c. \quad (1)$$

en la que t y z tienen el significado ya mencionado y, como antes, a , b y c , son constantes. Cuando $c > 0$, a indica la temperatura para $z = 0$ y cuando $c < 0$ la correspondiente a $z = \infty$; b siendo proporcional al gradiente de temperatura. En los casos que ocurren en la naturaleza el exponente c oscila entre $-0,8$ y $+0,8$. Esta fórmula que según las últimas investigaciones es la que mejor concuerda con la realidad, será, pues, la que emplearemos en nuestra investigación.

Para determinar las constantes de la ecuación (1), deben ejecutarse tres determinaciones de temperatura a diferentes alturas. En la investigación de la refracción el conocimiento exacto de la temperatura absoluta no es necesario y es suficiente determinar la variación de la temperatura. Por lo que el cálculo de a es superfluo y para la determinación de b y c basta la observación de las diferencias de temperatura entre tres termómetros colocados uno más arriba del otro.

Indicaremos a continuación cómo se han determinado las constantes de la ecuación de temperatura en nuestras primeras mediciones (1936). Disponíamos de tres termómetros, termoelementos, a las alturas $z_1 = 33,3$, $z_2 = 100$ y $z_3 = 300$ cm, obteniendo las diferencias de temperatura $\vartheta_1 = t_2 - t_1$ y $\vartheta_2 = t_3 - t_2$, si indicamos con t_1 , t_2 y

(1) Ver nota al pie de la página N° 11 y *Ch. Lallemand*: Nivellement de haute précision, Encyclopédie des Travaux publics, Paris & Liège 1912.

(2) *Hugershoff*: Der Zustand der Atmosphäre als Fehlerquelle im Nivellement, Diss. Dresden 1907.

(3) *Kohlmüller*: Zur Refraktion im Nivellement, Diss. München 1912.

t_3 las temperaturas a las alturas de 33,3, 100 y 300 cm respectivamente. En base a estas observaciones calculamos b y c como sigue.

Las temperaturas a las alturas correspondientes son, según la ecuación (1),

$$\begin{cases} t_1 = a + bz_1^c \\ t_2 = a + bz_2^c \\ t_3 = a + bz_3^c, \end{cases}$$

que escribimos en la forma

$$\begin{cases} \tau_1 = t_1 - a = bz_1^c \\ \tau_2 = t_2 - a = bz_2^c \\ \tau_3 = t_3 - a = bz_3^c. \end{cases}$$

Dividiendo estas expresiones e introduciendo los valores numéricos de z_1 , z_2 y z_3 , se obtiene

$$\begin{cases} \frac{\tau_2}{\tau_1} = \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^c = 3^c, \\ \frac{\tau_3}{\tau_2} = \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^c = 3^c, \end{cases}$$

de donde

$$\tau_1 \tau_3 = \tau_2^2.$$

Con ayuda de esta ecuación podemos escribir los valores

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau_1 \\ \tau_2 = \tau_1 + \vartheta_1 \\ \tau_3 = \tau_1 + \vartheta_1 + \vartheta_2 \end{cases}$$

en la forma

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2 - \vartheta_1}, \\ \tau_2 = \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_2 - \vartheta_1}, \\ \tau_3 = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_2 - \vartheta_1}. \end{cases}$$

De la ecuación

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\tau_3}{\tau_2} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = 3^c$$

fácilmente se obtiene el valor buscado

$$c = \frac{\log \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}}{\log 3} \quad (2)$$

y también

$$b = \frac{\vartheta_1}{z_2^c - z_1^c} = \frac{\vartheta_2}{z_3^c - z_2^c} \quad (3)$$

El valor de c calculado en esta forma para cada observación por separado es sin embargo inseguro, especialmente cuando ϑ_1 y ϑ_2 son pequeños. Por lo tanto, exceptuando las primeras mediciones (1936), hemos empleado valores medios de c . Para nuestro cálculo hemos adoptado las observaciones de *Best* ⁽¹⁾ como valores de partida. *Best* ha registrado las diferencias de temperatura entre las alturas de 2,5, 30 y 120 cm cada dos minutos durante dos años, desde el 1º de agosto de 1931 al 31 de julio de 1933 y publicó los valores medios para cada hora y cada mes que transcribimos en la Tabla 1.

Partiendo de estos valores hemos calculado el valor de c para cada hora de cada mes. Para ello hemos representado en forma gráfica el segundo miembro de la ecuación

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{z_2^c - z_1^c}{z_3^c - z_2^c}$$

deducida de la (3), y leído en el diagrama, para cada uno de los valores de $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$ obtenidos de la Tabla 1, el c correspondiente.

Los valores de c dados en la Tabla 2 corresponden a las observaciones de *Best*, las que fueron ejecutadas en el sur de Inglaterra ($\lambda = 2^\circ W$, $\varphi = 52^\circ N$).

(1) Ver nota al pie de la página N° 13.

TABLA 1. *Diferencias de temperatura en °C entre las alturas*

	ENERO		FEBRERO		MARZO		ABRIL		MAYO		JUN	
	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.
h												
1	+ 0,28	+ 0,23	+ 0,36	+ 0,21	+ 0,57	+ 0,45	+ 0,41	+ 0,32	+ 0,23	+ 0,29	+ 0,35	+
2	+ 0,26	+ 0,22	+ 0,33	+ 0,22	+ 0,52	+ 0,42	+ 0,37	+ 0,31	+ 0,21	+ 0,27	+ 0,27	+
3	+ 0,26	+ 0,26	+ 0,32	+ 0,19	+ 0,48	+ 0,39	+ 0,37	+ 0,28	+ 0,17	+ 0,27	+ 0,27	+
4	+ 0,24	+ 0,30	+ 0,32	+ 0,21	+ 0,46	+ 0,37	+ 0,31	+ 0,29	+ 0,15	+ 0,24	+ 0,23	+
5	+ 0,26	+ 0,26	+ 0,28	+ 0,18	+ 0,41	+ 0,31	+ 0,29	+ 0,24	0,00	+ 0,11	- 0,12	+
6	+ 0,19	+ 0,19	+ 0,28	+ 0,19	+ 0,38	+ 0,35	+ 0,13	+ 0,13	- 0,32	- 0,07	- 0,59	-
7	+ 0,19	+ 0,17	+ 0,27	+ 0,17	+ 0,16	+ 0,14	- 0,37	- 0,11	- 0,67	- 0,22	- 0,98	-
8	+ 0,16	+ 0,16	+ 0,17	+ 0,09	- 0,27	- 0,09	- 0,72	- 0,24	- 0,98	- 0,38	- 1,41	-
9	+ 0,09	+ 0,08	- 0,07	- 0,02	- 0,66	- 0,29	- 0,99	- 0,39	- 1,23	- 0,46	- 1,59	-
10	- 0,13	- 0,02	- 0,34	- 0,13	- 0,87	- 0,41	- 1,17	- 0,51	- 1,27	- 0,50	- 1,71	-
11	- 0,27	- 0,09	- 0,51	- 0,23	- 1,04	- 0,52	- 1,13	- 0,52	- 1,31	- 0,54	- 1,80	-
12	- 0,28	- 0,07	- 0,61	- 0,27	- 1,09	- 0,54	- 1,22	- 0,56	- 1,32	- 0,57	- 1,88	-
13	- 0,17	- 0,09	- 0,47	- 0,22	- 1,01	- 0,52	- 1,22	- 0,57	- 1,39	- 0,62	- 1,62	-
14	- 0,10	- 0,06	- 0,34	- 0,18	- 0,89	- 0,44	- 0,99	- 0,45	- 1,12	- 0,51	- 1,43	-
15	+ 0,09	+ 0,04	- 0,11	- 0,07	- 0,60	- 0,33	- 0,77	- 0,40	- 0,94	- 0,41	- 1,15	-
16	+ 0,29	+ 0,19	+ 0,21	+ 0,06	- 0,13	- 0,15	- 0,42	- 0,26	- 0,58	- 0,31	- 0,90	-
17	+ 0,44	+ 0,29	+ 0,43	+ 0,17	+ 0,15	+ 0,07	- 0,23	- 0,12	- 0,35	- 0,18	- 0,52	-
18	+ 0,39	+ 0,31	+ 0,57	+ 0,28	+ 0,54	+ 0,32	+ 0,13	+ 0,06	- 0,03	- 0,04	- 0,12	-
19	+ 0,34	+ 0,29	+ 0,52	+ 0,32	+ 0,74	+ 0,55	+ 0,37	+ 0,23	+ 0,14	+ 0,08	+ 0,09	+
20	+ 0,33	+ 0,28	+ 0,53	+ 0,29	+ 0,71	+ 0,52	+ 0,42	+ 0,34	+ 0,28	+ 0,24	+ 0,37	+
21	+ 0,29	+ 0,28	+ 0,49	+ 0,28	+ 0,64	+ 0,48	+ 0,42	+ 0,35	+ 0,25	+ 0,29	+ 0,48	+
22	+ 0,32	+ 0,30	+ 0,48	+ 0,28	+ 0,63	+ 0,47	+ 0,44	+ 0,35	+ 0,28	+ 0,31	+ 0,46	+
23	+ 0,33	+ 0,30	+ 0,46	+ 0,24	+ 0,61	+ 0,43	+ 0,47	+ 0,32	+ 0,27	+ 0,31	+ 0,37	+
24	+ 0,30	+ 0,23	+ 0,43	+ 0,27	+ 0,54	+ 0,41	+ 0,47	+ 0,34	+ 0,24	+ 0,32	+ 0,35	+

m (1) como así también entre 30 y 120 cm (2) según Best

JULIO		AGOSTO		SETIEMBRE		OCTUBRE		NOVIEMBRE		DICIEMBRE	
	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.
0	+ 0,23	+ 0,24	+ 0,18	+ 0,29	+ 0,31	+ 0,38	+ 0,34	+ 0,32	+ 0,23	+ 0,30	+ 0,19
5	+ 0,21	+ 0,17	+ 0,18	+ 0,17	+ 0,26	+ 0,39	+ 0,32	+ 0,27	+ 0,19	+ 0,27	+ 0,17
5	+ 0,20	+ 0,14	+ 0,17	+ 0,24	+ 0,25	+ 0,37	+ 0,37	+ 0,29	+ 0,19	+ 0,27	+ 0,18
8	+ 0,16	+ 0,12	+ 0,14	+ 0,20	+ 0,24	+ 0,29	+ 0,30	+ 0,28	+ 0,17	+ 0,29	+ 0,17
7	+ 0,07	+ 0,08	+ 0,12	+ 0,21	+ 0,22	+ 0,29	+ 0,29	+ 0,31	+ 0,21	+ 0,28	+ 0,16
9	- 0,02	- 0,13	0,00	+ 0,09	+ 0,14	+ 0,27	+ 0,26	+ 0,32	+ 0,19	+ 0,29	+ 0,18
6	- 0,11	- 0,44	- 0,15	- 0,21	- 0,03	+ 0,13	+ 0,19	+ 0,29	+ 0,17	+ 0,31	+ 0,19
9	- 0,23	- 0,69	- 0,24	- 0,46	- 0,12	- 0,18	- 0,03	+ 0,21	+ 0,12	+ 0,31	+ 0,17
23	- 0,29	- 0,88	- 0,33	- 0,67	- 0,22	- 0,46	- 0,18	- 0,02	- 0,02	+ 0,16	+ 0,08
26	- 0,34	- 1,19	- 0,44	- 0,88	- 0,32	- 0,67	- 0,23	- 0,27	- 0,12	- 0,03	- 0,02
39	- 0,39	- 1,29	- 0,51	- 0,95	- 0,35	- 0,71	- 0,29	- 0,30	- 0,14	- 0,16	- 0,07
38	- 0,43	- 1,36	- 0,53	- 0,87	- 0,33	- 0,72	- 0,29	- 0,33	- 0,14	- 0,18	(1) + 0,01
34	- 0,43	- 1,26	- 0,54	- 0,81	- 0,33	- 0,64	- 0,27	(1) + 0,03	- 0,05	(1) + 0,12	- 0,04
16	- 0,41	- 1,18	- 0,49	- 0,55	- 0,25	- 0,54	- 0,22	- 0,10	- 0,06	0,00	- 0,01
36	- 0,33	- 0,84	- 0,38	- 0,46	- 0,19	- 0,17	- 0,01	+ 0,09	+ 0,09	+ 0,22	+ 0,10
37	- 0,26	- 0,56	- 0,33	- 0,24	- 0,11	+ 0,18	+ 0,01	+ 0,35	+ 0,20	+ 0,41	+ 0,21
17	- 0,16	- 0,36	- 0,17	+ 0,11	+ 0,03	+ 0,50	+ 0,26	+ 0,39	+ 0,26	+ 0,42	+ 0,26
08	- 0,05	+ 0,12	+ 0,01	+ 0,26	+ 0,14	+ 0,61	+ 0,43	+ 0,41	+ 0,27	+ 0,39	+ 0,27
12	+ 0,05	+ 0,36	+ 0,20	+ 0,34	+ 0,27	+ 0,49	+ 0,49	+ 0,38	+ 0,26	+ 0,40	+ 0,27
29	+ 0,19	+ 0,35	+ 0,29	+ 0,34	+ 0,29	+ 0,52	+ 0,42	+ 0,33	+ 0,23	+ 0,37	+ 0,24
31	+ 0,23	+ 0,36	+ 0,30	+ 0,31	+ 0,28	+ 0,51	+ 0,39	+ 0,35	+ 0,23	+ 0,38	+ 0,27
30	+ 0,23	+ 0,31	+ 0,31	+ 0,26	+ 0,25	+ 0,48	+ 0,39	+ 0,38	+ 0,23	+ 0,43	+ 0,28
25	+ 0,21	+ 0,28	+ 0,28	+ 0,27	+ 0,29	+ 0,43	+ 0,40	+ 0,35	+ 0,22	+ 0,37	+ 0,24
23	+ 0,23	+ 0,28	+ 0,28	+ 0,29	+ 0,31	+ 0,44	+ 0,36	+ 0,31	+ 0,21	+ 0,37	+ 0,22

No es real por haberse hallado el termómetro a la sombra de un objeto cercano.

TABLA 2 — Exponente c en la ecuación $t = a + bz^c$ de acuerdo a las observaciones de

	ENERO	FEBR.	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO	AGOSTO	SEPT.	OCT.	NOV	DIC.
h												
1	+ 0,20	+ 0,03	+ 0,18	+ 0,18	+ 0,44	+ 0,29	+ 0,39	+ 0,15	+ 0,34	+ 0,24	+ 0,13	+
2	+ 0,22	+ 0,09	+ 0,19	+ 0,21	+ 0,45	+ 0,28	+ 0,50	+ 0,33	+ 0,55	+ 0,20	+ 0,12	+
3	+ 0,31	+ 0,03	+ 0,19	+ 0,16	+ 0,57	+ 0,26	+ 0,48	+ 0,42	+ 0,33	+ 0,31	+ 0,08	+
4	+ 0,43	+ 0,08	+ 0,19	+ 0,27	+ 0,57	+ 0,29	+ 0,70	+ 0,40	+ 0,41	+ 0,32	+ 0,04	+
5	+ 0,31	+ 0,07	+ 0,16	+ 0,20	—	—	—	+ 0,54	+ 0,34	+ 0,31	+ 0,10	+
6	+ 0,31	+ 0,10	+ 0,26	+ 0,31	— 0,46	— 0,69	(— 0,81)	—	+ 0,56	+ 0,33	+ 0,03	+
7	+ 0,25	+ 0,06	+ 0,27	— 0,32	— 0,27	— 0,45	— 0,60	— 0,25	(— 0,66)	+ 0,52	+ 0,02	+
8	+ 0,31	— 0,03	— 0,27	— 0,27	— 0,19	— 0,35	— 0,43	— 0,24	— 0,38	(— 0,60)	+ 0,01	+
9	+ 0,25	— 0,34	— 0,09	— 0,18	— 0,21	— 0,31	— 0,42	— 0,20	— 0,27	— 0,18	(+ 0,31)	—
10	(— 0,63)	— 0,20	— 0,05	— 0,13	— 0,18	— 0,25	— 0,37	— 0,22	— 0,22	— 0,26	— 0,12	(+ 0,31)
11	— 0,26	— 0,11	— 0,06	— 0,10	— 0,16	— 0,25	— 0,35	— 0,18	— 0,22	— 0,17	— 0,09	—
12	— 0,40	— 0,12	— 0,06	— 0,10	— 0,13	— 0,21	— 0,30	— 0,19	— 0,20	— 0,17	— 0,14	—
13	— 0,04	— 0,09	— 0,04	— 0,09	— 0,12	— 0,20	— 0,28	— 0,14	— 0,17	— 0,15	—	—
14	+ 0,04	— 0,03	— 0,06	— 0,11	— 0,11	— 0,20	— 0,24	— 0,16	— 0,11	— 0,17	+ 0,04	—
15	(— 0,12)	+ 0,07	— 0,01	— 0,03	— 0,13	— 0,15	— 0,19	— 0,10	— 0,16	(— 1,1)	+ 0,31	—
16	+ 0,08	— 0,34	+ 0,39	+ 0,05	— 0,02	— 0,13	— 0,19	+ 0,02	— 0,10	(— 1,1)	+ 0,01	—
17	+ 0,09	— 0,18	— 0,12	— 0,03	— 0,04	— 0,12	— 0,26	— 0,08	(— 0,36)	— 0,03	+ 0,09	+
18	+ 0,18	— 0,07	+ 0,04	— 0,10	(+ 0,47)	+ 0,16	+ 0,06	(— 0,91)	— 0,02	+ 0,12	+ 0,08	+
19	+ 0,22	+ 0,06	+ 0,15	+ 0,05	+ 0,01	+ 0,09	— 0,14	0,00	+ 0,18	+ 0,31	+ 0,11	+
20	+ 0,22	— 0,01	+ 0,14	+ 0,20	+ 0,22	+ 0,05	+ 0,08	+ 0,20	+ 0,22	+ 0,19	+ 0,11	+
21	+ 0,28	+ 0,02	+ 0,16	+ 0,21	+ 0,40	+ 0,11	+ 0,15	+ 0,21	+ 0,25	+ 0,16	+ 0,08	+
22	+ 0,27	+ 0,03	+ 0,15	+ 0,18	+ 0,37	+ 0,13	+ 0,17	+ 0,31	+ 0,29	+ 0,20	+ 0,04	+
23	+ 0,26	— 0,06	+ 0,14	+ 0,10	+ 0,39	+ 0,22	+ 0,22	+ 0,31	+ 0,35	+ 0,27	+ 0,06	+
24	+ 0,17	+ 0,06	+ 0,16	+ 0,13	+ 0,47	+ 0,24	+ 0,31	+ 0,31	+ 0,35	+ 0,20	+ 0,10	+

Los números entre paréntesis corresponden a diferencias de temperatura $< 0^{\circ},05$

Nuestro trabajo ha tenido lugar en Finlandia por lo que entre los tiempos de la salida del sol en ambos lugares, lo mismo que entre los de la puesta, existe una cierta diferencia. A continuación se han deducido los valores de c para cada caso teniendo en cuenta la correspondiente diferencia de tiempo. En el sur de Inglaterra la altura del sol es diferente a la de Finlandia. La influencia de las nubes y de la transparencia del aire sobre la intensidad de la irradiación, que sin embargo es mayor a la correspondiente a la diferencia de la altura solar relativamente pequeña, no debe tenerse en cuenta debido a sus grandes oscilaciones. Por lo tanto tampoco hemos tomado en consideración la diferencia de las alturas solares.

Hemos puesto gran empeño en el procedimiento práctico para la determinación de las diferencias de temperatura.

El termómetro de mercurio no es adecuado para mediciones micrométricas de la temperatura del aire, por ser sumamente difícil anular su gran error de irradiación, $1-2^\circ$, en días claros y de calma. Además, la inercia del termómetro de mercurio es demasiado grande para mediciones microclimáticas. Los aparatos de medición eléctricos no presentan estos inconvenientes. Indudablemente los termoelementos y el termómetro de resistencia únicamente indican diferencias de temperatura y no temperaturas absolutas, salvo con dispositivos especiales; empero éstas no son necesarias para la determinación del gradiente de temperatura y por lo tanto esta circunstancia no puede considerarse como una desventaja. Por esta razón hemos elegido los métodos de medición eléctricos.

Cuando se quiere medir la diferencia de temperatura entre dos puntos, éstos deben estar vinculados entre sí mediante un conductor eléctrico. Las determinaciones de temperatura se hacían antes a lo largo de la visual del instrumento de nivelación, procedimiento que requería conductores sumamente largos entre puntos muy distantes. Tal dispositivo es difícil de realizar en la práctica, produce muchas molestias durante los trabajos en campaña y los largos conductores constituyen una muy importante fuente de errores. Por tal motivo hemos determinado el gradiente de temperatura a lo largo de una o de varias líneas verticales, con lo que el largo de los conductores sólo es de algunos metros y se alcanza la mayor precisión posible en la práctica.

Respecto a los termoelementos empleados por nosotros debe decirse lo siguiente: en nuestras primeras investigaciones (1936) habíamos empleado termoelementos cuya disposición ha sido representada en la figura 1. Las soldaduras de cobre-constantán (A , B , C) que

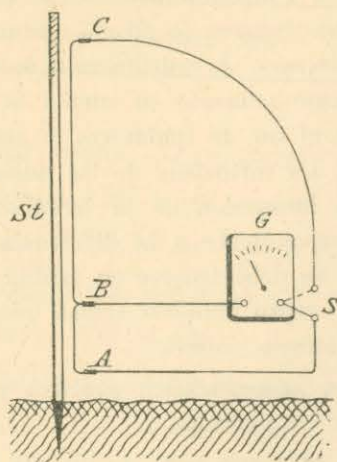


Fig. 1

Conexión de los termoelementos

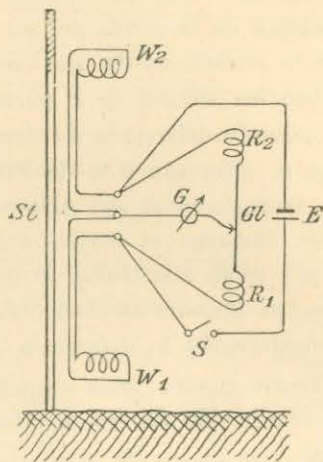


Fig. 2

Conexión del termómetro de resistencia

servían como termoelementos se hallaban en una varilla a 33,3, 100 y 300 cm de altura respectivamente. Los conductores entre el galvanómetro (G) y las soldaduras son de cobre, y entre las soldaduras de constantán.

El galvanómetro construido por la firma W. G. Pye & Co. tenía una resistencia interna de aproximadamente 100Ω y la unidad de división era de $4 \cdot 10^{-7} A$, más o menos. Por lo tanto, cada división de la escala correspondía a una diferencia de temperatura de $0^{\circ},9 C$ entre las soldaduras A y B y B y C respectivamente, las que por medio del conmutador de mercurio (S) podían conectarse alternativamente de a pares con el galvanómetro. Esta disposición permite la determinación de la diferencia de temperatura con la precisión de $0^{\circ},1 C$, y si bien teóricamente es de fácil ejecución, tiene sin embargo algunas desventajas prácticas. Los termoelementos deben ser contruídos de alambre muy fino para reducir la inercia y por lo tanto son muy frágiles. Como la fuerza electromotriz del termoelemento simple es a lo sumo de algunos diez microvoltios, el galvanómetro requerido en este caso debe ser tan sensible, que su empleo en campaña es dificultoso y peligroso.

Como debido a estas causas el termoelemento tenía ciertos defectos, en las mediciones posteriores (1937) empleamos el termómetro de resistencia, que llena en mejor forma las exigencias requeridas.

Hemos transformado algo el termómetro de resistencia de *Albrecht* para la medición de la temperatura del aire (1). La conexión está constituida por un puente de *Wheatstone*, como muestra la figura 2.

Las resistencias W_1 y W_2 son de alambre de platino de 0,1 mm de diámetro y 50 cm de largo y tienen una resistencia de aproximadamente 10 Ω . Las otras resistencias R_1 y R_2 son de 9 Ω y tanto éstas como un contacto a corredera Gl de 0,8 mm de espesor, provisto de una escala, son de constantán. Se ha empleado un galvanómetro simple en forma de caja de Siemens & Halske, que posee una resistencia interna de 10 Ω y una sensibilidad de $5 \cdot 10^{-5}$ A por unidad de escala. Se obtiene la corriente mediante la pila seca E de 1,5 V de tensión conectada al conmutador S . Con el aparato arriba descrito se obtiene tal sensibilidad del instrumento, que una diferencia de temperatura de 1° C entre las resistencias W_1 y W_2 provoca un movimiento del contacto a corredera de aproximadamente 1,5 cm. La influencia de eventuales variaciones de la resistencia en las ramas de conexión, es decir, el desplazamiento del punto cero del aparato, se eliminó observando las resistencias de platino en posiciones intercambiadas mediante la inversión de la varilla.

Humedad. La marcha diaria del gradiente de humedad vertical es parecida y paralela a la del gradiente de temperatura. Llamamos la atención sobre el hecho de que en nuestro caso debe emplearse la humedad absoluta y no la relativa. A la mañana, a la hora de la salida del sol el gradiente es igual a cero. Luego se hace negativo, es decir, la presión del vapor de agua disminuye con el crecer de la altura y el gradiente tiene su mínimo alrededor del mediodía. Nuevamente alcanza a su valor cero a la hora de la puesta del sol, y luego es positivo hasta la salida del sol. Los valores medios máximos y mínimos de la diferencia de humedad entre 20 y 150 cm son según *Rossi* (2) de aproximadamente +1 y -1 mm Hg, respectivamente, según *Franssila* (3) de aproximadamente +1 y -2 mm Hg, y según nuestras propias observaciones (Tabla 3) el mínimo es de -1 mm Hg, más o menos; respecto al máximo nada podemos decir debido a la falta de observaciones nocturnas.

A pesar de que la causa del gradiente de humedad vertical en parte es diferente a la del gradiente de temperatura, el parecido es

(1) *F. A. Albrecht*: Thermometer zur Messung der wahren Lufttemperatur, Met. Zeitschr., S. 421, 1927.

(2) *V. Rossi*: Ueber mikroklimatologische Temperatur und Feuchtigkeitsbeobachtungen mit Thermoelementpsychrometern, Mitteilungen des Meteorologischen Instituts der Universität Helsingfors N° 24, Helsinki 1933.

(3) *M. Franssila*: Mikroklimatische Untersuchungen des Wärmehaushalts, Mitteilungen der Meteorologischen Zentralanstalt N° 20, Helsinki 1936.

tan grande, que el contenido de vapor de agua puede expresarse por la fórmula

$$e = d + fz^g,$$

que tiene la misma forma que la ecuación (1) (página 15), siendo e la humedad en $mm\ Hg$, z la altura y d, f, g constantes. *Franssila* ha demostrado que g es de igual magnitud que c en la ecuación de temperatura (1). Por consiguiente para la humedad podemos escribir la fórmula

$$e = d + fz^c, \quad (4)$$

en la que c es idéntico a c en la ecuación (1). La determinación del exponente no se basa por lo tanto en las relativamente inexactas observaciones de humedad y es suficiente medir la humedad a dos alturas únicamente.

Las determinaciones de humedad sólo fueron ejecutadas en nuestras primeras mediciones (1936). Como aparato de medición usamos el psicrómetro de aspiración de *Assmann* comunmente empleado. Este no es muy adecuado para mediciones microclimáticas de esta naturaleza, pero como la humedad causa una corrección sumamente pequeña, como se demostrará más adelante, no tenemos interés en una precisa investigación de dicha cuestión. Una mejor determinación del gradiente de humedad sería posible con ayuda de métodos de medición eléctricos.

Contenido de ácido carbónico del aire. En estado normal el aire libre contiene 0,03 % en volumen de ácido carbónico. Sin embargo esta cantidad puede variar considerablemente. Según *Lundegard* (1) en el bosque y en el pasto, por ejemplo, se ha registrado un 0,07 % de ácido carbónico y a 1,50 m de altura 0,05 %, mientras que en las copas de los árboles predomina el valor normal de 0,03 %. Empero tales casos no se presentan en las nivelaciones. Por regla general las líneas de nivelación corren por campos abiertos y allí el contenido de ácido carbónico tiene el valor normal.

En nuestras primeras mediciones (1936) hemos determinado el contenido de ácido carbónico en diferentes lugares y alturas a lo largo de las visuales, como así también a diferentes horas. Las pruebas de aire de $100\ cm^3$ se examinaron en forma potenciométrica, oscilando los resultados entre 0,030 y 0,038 %.

(1) *H. Lundegard*: Klima und Boden in ihrer Wirkung auf das Pflanzenleben, Jena 1925.

Presión atmosférica. Como en la nivelación de precisión únicamente se ejecutan bisecciones horizontales en las partes medias de las miras, el gradiente de presión atmosférica normal vertical no tiene influencia sobre la refracción nivelítica, como tampoco el gradiente de presión atmosférica horizontal regular producido por el viento.

Algo diferente se presenta el caso con las oscilaciones micrométricas de la presión atmosférica producidas por las ráfagas de viento. Estas tampoco pueden ascender a un valor considerable. Según las observaciones de *Schmidt* (1) puede estimarse que no pueden ser mayores de $0,05 \text{ mm Hg}$, si se supone una distancia de 100 m y un viento 6 según la escala de *Beaufort*. Además debe mencionarse que las variaciones mencionadas en último lugar son oscilatorias y por lo tanto de carácter accidental.

(1) *W. Schmidt*: Ueber Luftwogen I, Variogramme von Innsbruck, Met. Zeitschr. XLIX, S. 170, 1914.

DEDUCCION DE LAS FORMULAS

Coefficiente de refracción del aire. Entre el coeficiente de refracción (n) y los factores que sobre él influyen existe, según *Meggers* y *Peters*, ⁽¹⁾ la ecuación

$$n - 1 = \frac{0.0002923}{1 + 0.00368 \cdot t} \cdot \frac{B}{760} - 0.000041 \cdot \frac{e}{760} + \\ + 0.0000016 \cdot k \cdot \frac{B}{760},$$

en la que t significa la temperatura en °C, B la presión barométrica en mm Hg, e la presión del vapor de agua en mm Hg y k el porcentaje en volumen de ácido carbónico contenido en el aire. La fórmula vale para la longitud de onda $556 m\mu$, es decir, para el máximo de luminosidad de la luz blanca.

La magnitud absoluta de la refracción del aire no tiene aplicación en la investigación del camino del rayo de luz, sino únicamente es necesario determinar las variaciones del poder de refracción debido a varios factores. Por lo tanto formemos: 1º, la diferencial con respecto a la temperatura

$$dn = - \frac{0.0002923 \cdot 0.00368}{(1 + 0.00368 \cdot t)^2} \cdot \frac{B}{760} \cdot dt,$$

o, con suficiente aproximación,

$$dn = - \left(0.000\ 000\ 933 - 0.000\ 000\ 0064 \cdot (t - 20) \right) \frac{B}{760} \cdot dt, \quad (5)$$

(1) *W. F. Meggers and C. A. Peters: Measurement on the Index of Refraction of Air for Wave Lengths from 2218 Å to 9000 Å, Scientific Papers of the Bureau of Standards N° 327, Washington 1918.*

2º, la diferencial con respecto a la humedad

$$dn = - 0.000\ 000\ 054 \cdot de , \quad (6)$$

3º, la diferencial con respecto al contenido de ácido carbónico

$$dn = + 0.000\ 0016 \cdot \frac{B}{760} \cdot dk , \quad (7)$$

y 4º, la diferencial con respecto a la presión atmosférica

$$dn = \left(\frac{0.000\ 2923}{(1 + 0.00368\ t) \cdot 760} + \frac{0.000\ 0016}{760} \cdot k \right) dB ,$$

o, con suficiente aproximación,

$$dn = (0.000\ 000\ 385 - 0.000\ 000\ 0014 \cdot t) dB. \quad (8)$$

Con lo que podemos determinar la influencia de cada factor sobre el poder de refracción hasta la altura de 3 m sobre la superficie terrestre y para una distancia de 100 m. Los límites mencionados valen para la nivelación de precisión común, en la que se emplea una distancia visual de 50 m. Si se introducen en las diferenciales establecidas anteriormente los valores máximos estimados de las oscilaciones microclimáticas, es decir, $dt = 2^\circ$, $de = 2\text{ mm Hg}$, $dk = 0,02\%$ y $dB = 0,05\text{ mm Hg}$ y se adoptan los valores medios $t = +15^\circ$ y $B = 760\text{ mm Hg}$, resultan las siguientes variaciones de la refracción del aire:

debido a la temperatura:	$dn = 1.92 \cdot 10^{-6}$,
„ „ „ humedad:	$dn = 0.108 \cdot 10^{-6}$,
„ al ácido carbónico:	$dn = 0.032 \cdot 10^{-6}$,
„ a la presión atmosférica:	$dn = 0.018 \cdot 10^{-6}$.

De estas magnitudes resulta que la influencia de la temperatura es predominante en comparación con la de los demás factores.

Esto lo confirma también nuestras investigaciones experimentales hechas al efectuar las primeras mediciones (1936). La corrección nivelítica por refracción debida a la humedad nunca sobrepasaba en ellas 0,02 mm, y una cantidad mucho menor aun, de aproximadamente 0,001 mm, correspondía a la influencia del ácido carbónico. El valor 0,02 % arriba adoptado para la posible diferencia en el contenido

de ácido carbónico, puede presentarse sólo muy pocas veces, ya que las líneas de nivelación sólo en casos excepcionales corren por lugares protegidos que son favorables a un contenido anormal de ácido carbónico.

En virtud de lo anterior podemos afirmar que la variación del coeficiente de refracción (dn), que debido a las oscilaciones microclimáticas actúa sobre la nivelación, depende esencialmente de la variación de temperatura (dt) y puede ser expresada por la fórmula

$$dn = -10^{-8} \left(0.933 - 0.0064 (t-20) \right) \frac{B}{760} dt \quad (9)$$

Refracción nivelítica. Como ya se ha mencionado, las oscilaciones microclimáticas, especialmente las térmicas, causan la vibración y la fluctuación de las imágenes con carácter puramente accidental. Cierta error sistemático, la refracción nivelítica, aparece cuando existe una diferencia constante del poder de refracción entre varios puntos de la visual. Este es el caso cuando la medición corre cuesta arriba o cuesta abajo. En tal caso la visual tiene distinta altura sobre el suelo y por lo tanto atraviesa capas de aire que tienen entre si ciertas diferencias de temperatura. A continuación deduciremos las fórmulas para esta refracción nivelítica sistemática.

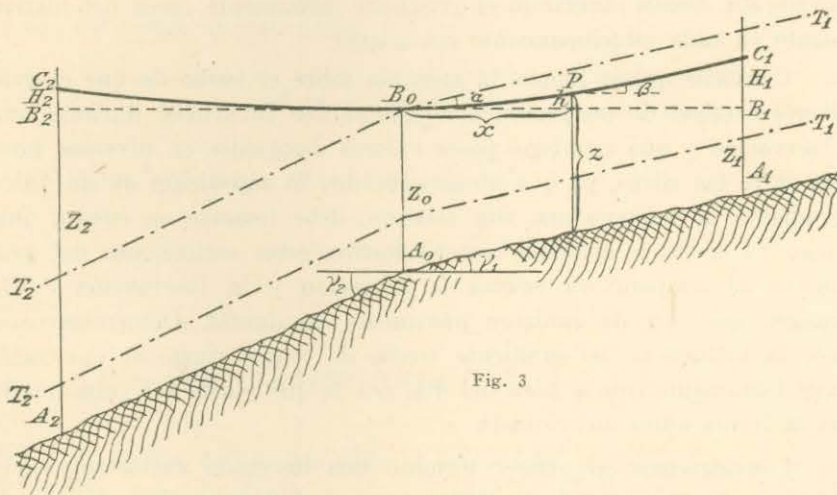


Fig. 3

Para facilitar la consideración de la marcha del rayo de luz, principiamos por hacer algunas simplificaciones que no modifican esencialmente el fenómeno. La superficie terrestre es reemplazada por dos planos que parten de la posición del instrumento A_0 y tienen

las inclinaciones γ_1 y γ_2 respectivamente, despreciando pequeñas ondulaciones eventuales del terreno.

En la figura 3, B_0 representa el instrumento de nivelación, B_0B_1 y B_0B_2 ambos ejes de colimación, las líneas curvas B_0C_1 y B_0C_2 los rayos de luz verdaderos y A_1C_1 y A_2C_2 las miras. En este caso suponemos que la medición corre en dirección de A_2 a A_1 . Los mencionados planos que representan la superficie terrestre han sido dibujados como líneas sombreadas A_0A_1 y A_0A_2 . Si además suponemos que el gradiente vertical de temperatura es idéntico a lo largo de todo el trayecto $A_2A_0A_1$, pueden representarse las superficies isotérmicas en el aire como planos T_1 y T_2 paralelos a la superficie terrestre. Podría parecer que las superficies isotérmicas no pueden mantener tal posición inclinada. Sin embargo la velocidad de intercambio en dirección horizontal es tan pequeña que puede influir sólo en forma insignificante sobre el gran gradiente vertical de temperatura.

Empleando las simplificaciones antes mencionadas es suficiente efectuar una o algunas determinaciones del gradiente. En el caso (1936) en que hemos efectuado nuestras mediciones en una única posición del instrumento, hemos observado los gradientes cerca del instrumento y de ambas miras. Mas adelante (1937) cuando se determinaba la corrección por refracción a medida que progresaba la nivelación, hemos observado el gradiente únicamente cerca del instrumento en cada estacionamiento del mismo.

Conviene quizás llamar la atención sobre el hecho de que el gradiente vertical de temperatura no permanece invariable durante una observación y que asimismo posee valores desiguales en diversos puntos entre las miras, ya que no es admisible la suposición de un único gradiente de temperatura. Sin embargo debe tomarse en cuenta que, como ya se ha mencionado anteriormente, estas oscilaciones del gradiente de temperatura causan la vibración y la fluctuación de la imagen que son de carácter puramente accidental. Determinaremos sólo la influencia del gradiente medio de temperatura, el que varía muy lentamente con la hora del día, por lo que puede ser considerado en la forma antes mencionada.

Consideremos en primer término una bisección unilateral, hacia adelante, de B_0 a B_1 . Si designamos con α el ángulo entre el rayo de luz y la superficie isotérmica, contado a partir de esta última, obtenemos entre este ángulo y el coeficiente de refracción (n) la conocida relación

$$n \cdot \cos \alpha = \text{const.},$$

de la que resulta la ecuación diferencial

$$d\alpha = \cot \alpha \cdot \frac{dn}{n}$$

En el instrumento de nivelación (B_0) el rayo de luz es horizontal, es decir, el ángulo α en dicho lugar es igual al ángulo $-\gamma_1$. El ángulo de inclinación β del rayo de luz en un punto cualquiera (P) que se encuentra a una distancia x del instrumento (B_0) resulta expresado por la integral

$$\beta = \int_{n_0}^n \frac{\cot \alpha}{n} dn,$$

en la que n_0 y n expresan los coeficientes de refracción en los puntos B_0 y P respectivamente. Podemos reemplazar el ángulo α bajo el signo integral por el ángulo constante $-\gamma_1$, del que α difiere sólo en forma insignificante. Por lo tanto obtenemos del integral anterior,

$$\beta = -\cot \gamma_1 \cdot \ln \frac{n}{n_0},$$

o con suficiente aproximación,

$$\beta = -\frac{\cot \gamma_1}{n_0} (n - n_0).$$

De las ecuaciones (1) y (9) resulta

$$n - n_0 = d \cdot b \cdot (z^c - z_0^c),$$

siendo

$$d = -10^{-8} \left(0.933 - 0.0064 (t - 20) \right) \frac{B}{760}. \quad (10)$$

Con ayuda de las dos últimas ecuaciones obtenemos en el punto P la diferencia de altura entre el verdadero rayo de luz (B_0C_1) y la prolongación del eje horizontal del instrumento (B_0B_1)

$$h = \int_0^x \beta dx = -\frac{\cot \gamma_1}{n_0} \cdot d \cdot b \int_0^x (z^c - z_0^c) dx.$$

Introducimos como nueva variable de integración

$$z = Z_0 - \operatorname{tg} \gamma_1 \cdot x ,$$

en la que Z_0 indica la altura del instrumento, y despreciamos la magnitud h sumamente pequeña respecto a z . Después de esta sustitución introducimos el valor de b dado por la (3) y ejecutamos la simplificación $n_0 = 1$. Resulta entonces, efectuada la integración, la diferencia vertical B_1C_1 entre el rayo de luz y el eje del instrumento en el lugar de la mira de adelante

$$H_1 = \cot^2 \gamma_1 \cdot d \cdot \frac{\vartheta_1}{z_2^c - z_1^c} \left\{ \frac{1}{c+1} Z_1^{c+1} - Z_0^c Z_1 + \frac{c}{c+1} Z_0^{c+1} \right\}, \quad (11)$$

en la que Z_1 significa la altura de la visual en la mira.

En forma parecida encontramos la diferencia (B_2C_2) en la mira de atrás

$$H_2 = \cot^2 \gamma_2 \cdot d \cdot \frac{\vartheta_1}{z_2^c - z_1^c} \left\{ \frac{1}{c+1} Z_2^{c+1} - Z_0^c Z_2 + \frac{c}{c+1} Z_0^{c+1} \right\}. \quad (12)$$

La corrección (H) que debe sumarse al resultado de la nivelación en esta posición del instrumento (B_0) cuando la medición corre en dirección $A_2 - A_1$ resulta por sustracción

$$H = H_1 - H_2. \quad (13)$$

En el caso en que $\gamma_1 = -\gamma_2$, es decir en que la superficie terrestre $A_2A_0A_1$ forma un plano uniforme, puede escribirse $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$, resultando entonces la corrección expresada por la fórmula

$$H = \cot^2 \gamma \cdot d \cdot \frac{\vartheta_1}{z_2^c - z_1^c} \left\{ \frac{1}{c+1} (Z_1^{c+1} - Z_2^{c+1}) - Z_0^c (Z_1 - Z_2) \right\}. \quad (14)$$

Con la fórmula (11), (12), (13) y (14) se puede calcular, por regla general, la corrección por refracción. Sin embargo existen algunos casos que toman forma indeterminada; lo que investigaremos a continuación.

Si $c = 0$, las fórmulas dadas toman la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Por

diferenciación resultan los valores verdaderos para este caso:

$$H_1 = \cot^2 \gamma_1 \cdot d \cdot \frac{\vartheta_1}{\ln \frac{z_2}{z_1}} \left[Z_o - Z_1 - Z_1 \ln \frac{Z_o}{Z_1} \right], \quad (15)$$

$$H_2 = \cot^2 \gamma_2 \cdot d \cdot \frac{\vartheta_1}{\ln \frac{z_2}{z_1}} \left[Z_o - Z_2 - Z_2 \ln \frac{Z_o}{Z_2} \right] \quad (16)$$

y

$$H = \cot^2 \gamma \cdot d \cdot \frac{\vartheta_1}{\ln \frac{z_2}{z_1}} \left[Z_2 \left(1 + \ln \frac{Z_o}{Z_2} \right) - Z_1 \left(1 + \ln \frac{Z_o}{Z_1} \right) \right]. \quad (17)$$

Igualmente cuando la superficie terrestre es horizontal, es decir, cuando $Z_0 = Z_1 = Z_2$, las tres ecuaciones toman nuevamente la forma indeterminada $\infty \cdot 0$. Después de la sustitución

$$\cot \gamma_1 = \frac{s}{Z_o - Z_1} \quad \text{y} \quad \cot \gamma_2 = \frac{s}{Z_o - Z_1}, \quad \text{respectivamente,} \quad (18)$$

en la que s indica el largo de las visuales, es decir, la distancia horizontal B_0B_1 y B_0B_2 respectivamente, podemos calcular por diferenciación los valores verdaderos

$$H_1 = H_2 = \frac{1}{2} s^2 \cdot d \cdot \frac{\vartheta_1}{z_2^c - z_1^c} c Z_o^{c-1} \quad (19)$$

y

$$H = 0. \quad (20)$$

El valor (20) resulta directamente de las ecuaciones (13) y (19). El valor $c=0$ da para la ecuación (19) una forma indeterminada, la que nuevamente tiene el valor verdadero

$$H_1 = H_2 = \frac{s^2 \cdot d \cdot \vartheta_1}{2 Z_o \ln \frac{z_2}{z_1}}, \quad (21)$$

valor que también puede obtenerse de las fórmulas (15) y (16), respectivamente, por sustitución de la (18).

En lo que sigue cuando calculemos la corrección en función de las magnitudes observadas, emplearemos las fórmulas (11), (12) y (13), en las que se toma en cuenta la inclinación de la superficie terrestre eventualmente diferente en las visuales adelante y atrás.

En el caso de que este procedimiento requiere demasiado trabajo de cálculo empleamos la fórmula (14), la que toma en consideración la inclinación media de la superficie terrestre. En los casos en que ha sido necesario, se han calculado los verdaderos valores de las fórmulas empleadas con ayuda de las correspondientes expresiones (15), (16), (17), (19), (20) y (21).

ENSAYOS EN UNA ESTACION DEL INSTRUMENTO

Ejecución de las observaciones: Las primeras observaciones provisionales relativas al presente tema fueron ejecutadas en otoño de 1935 (el 4 y 6 de noviembre). Es de lamentar que ambos días de medición fueran nublados y lluviosos, por lo que el gradiente de temperatura era muy pequeño; en consecuencia no es de interés informar aquí acerca de los resultados de las observaciones obtenidas en tales circunstancias, ya que estos resultados rebasan ampliamente los límites del fenómeno en cuestión.

Un nuevo ensayo de nuestras fórmulas en una estación del instrumento tuvo lugar en el verano siguiente. Sobre este trabajo ya se ha informado a la 9. Asamblea de la Comisión Geodésica del Báltico (1). Para completar mi trabajo repetiré la descripción y los resultados de aquél.

Las observaciones se prolongaron por espacio de una semana, del 29 de junio al 4 de julio de 1936. Durante este período el tiempo se mantuvo durante todo el trabajo adecuado para investigaciones de esta clase, es decir, el cielo era despejado y el viento débil, como resalta en la Tabla 3.

El lugar de observación se encontraba en una carretera de asfalto en el parque Alppila de Helsinki. Dos bulones de acero (*A* y *B*, figura 4), con terminaciones en forma esférica, se habían fijado con cemento en la montaña a 100 m de distancia y en dirección SO - NW. Desde el instrumento de nivelación, estacionado en el centro (*C*) entre los dos bulones, hasta el bulón superior (*A*), el suelo se componía de 0,5 m de césped, 3 m de camino con pedregullo, 44 m de carretera asfaltada y 2 m de camino con pedregullo; y del instrumento hacia el bulón (*B*) inferior, de 2 m de camino con pedregullo, 42 m de carretera asfaltada y 6 m de roca desnuda.

(1) *T. J. Kukkamäki*: Einwirkung der bodennahen Refraktion auf das Präzisionsnivelement, Verh. d. Balt. Geod. Komm., 9. Tagung in Helsinki 1936, S. 179, Helsinki 1937.

La diferencia de altura de los bulones era de $1721,56 \pm 0,02$ mm según las nivelaciones efectuadas antes y después de las propias mediciones y una vez en medio de las mismas bajo condiciones favorables, con visuales de 16,7 y 10 m respectivamente, efectuadas ida y vuelta. En lo que sigue se ha empleado este valor como valor real. Para nuestro propósito la planeidad de la superficie terrestre era suficiente, siendo la diferencia media del perfil de la misma con respecto a una línea recta de sólo $\pm 0,15$ m. En la superficie terrestre no existe un punto de inflexión en el lugar de estacionamiento del instrumento, por lo que puede emplearse la fórmula (14).

En la observación se emplearon dos instrumentos de nivelación N° III y un par de miras invar de Zeiss. Durante los ensayos de refracción las miras fueron colocadas sobre los bulones de acero con ayuda de tres varillas de madera. La puntería sobre estas miras se efectuaba simultáneamente con los dos instrumentos antes mencionados. Uno de los instrumentos fué colocado de tal manera que la visual cortaba la mira superior a 20 cm de altura, mientras que la altura correspondiente en el segundo instrumento era de 92 cm. La distancia recíproca lateral de los dos niveles era aproximadamente de 1 m.

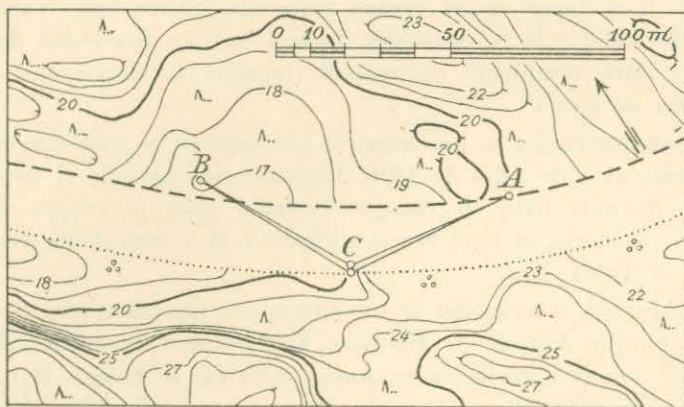


Fig. 4. Trayecto de ensayo de 100 m

La disposición de las observaciones era la siguiente: los instrumentos eran atendidos por dos observadores que ejecutaban las bisecciones simultáneamente. Los observadores tenían un apuntador en común. Una observación comprendía las bisecciones en el orden siguiente: sobre la división de la izquierda de la mira inferior, sobre las divisiones de la izquierda y de la derecha de la mira superior, y sobre la división de la derecha de la mira inferior; lo que duraba 2 minutos aproximadamente. Cada 8 de tales observaciones se reunían

en una serie. Una serie duraba 21 m término medio. Durante una serie después de la segunda y sexta observación los observadores cambiaban su lugar en los instrumentos. Los valores $H_{obs.}$ dados en la Tabla 3 han sido calculados promediando las 8 observaciones de cada serie. Era conveniente combinar las observaciones en series para compensar en algo las oscilaciones accidentales, especialmente al mediodía en que la vibración se hacía notar en forma sumamente desagradable.

En la práctica pueden determinarse en mejor forma relaciones microclimáticas medias para una serie prolongada de observaciones, que datos momentáneos para una sola bisección.

Para la determinación del gradiente de temperatura se emplearon los termoelementos de cobre y constantán antes descriptos, los que estaban dispuestos en tres barras verticales; la más baja a una altura de 33,3 cm, la del medio a 100 cm y la más alta a 300 cm del suelo. Dos de estas barras termoelemento se habían colocado cerca de la visual a 7,5 m de las miras y la tercera cerca de los instrumentos de nivelación. Las determinaciones de las diferencias de temperatura fueron efectuados por un tercer observador el que durante una serie de observación leía los termoelementos simultánea y lo más simétricamente posible con respecto a las bisecciones y en el siguiente orden: en la barra superior, media e inferior, inferior media y superior. En la tabla 3 se dan los valores medios de las diferencias de temperatura.

Las determinaciones de humedad a una altura de 10 y 150 cm, lo mismo que la lectura de la temperatura cuyo valor medio se da en la Tabla 3, fueron efectuadas por el tercer observador arriba mencionado con el psierómetro común de *Assmann* en el medio de cada serie de 8 observaciones. El lugar de observación de la humedad en las diferentes series se encontraba alternativamente cerca de ambas miras y de los instrumentos de nivelación.

Un barómetro aneroide de *Naudet* sirvió para la lectura de la presión barométrica.

El contenido de ácido carbónico del aire, como ya se ha dicho anteriormente, fué determinado potenciométricamente. Los resultados oscilaron entre los valores 0,030 y 0,038 % en volumen.

Todo el intervalo de tiempo comprendido entre las 3 h y las 22, en que fué posible trabajar sin luz artificial, fué cubierto con observaciones dobles.

Elaboración de las observaciones. Como ya se ha mencionado las mediciones de la nivelación fueron combinadas en series que comprenden 8 observaciones. Las diferencias entre los valores medios de las series y el valor real medido con visuales cortas en el sentido *lo que debe ser menos lo que es*, se han reproducido en la Tabla 3 bajo

la designación $H_{obs.}$ para la posición inferior y superior del instrumento.

Las correcciones calculadas en función del gradiente de temperatura han sido calculadas con las fórmulas deducidas en el capítulo anterior. Los coeficientes b y c de la ecuación de temperatura (1) se han obtenido con las fórmulas (2) y (3) mediante las observaciones de termoelementos; valores que se substituyen luego en las fórmulas (14) y (17). Las demás magnitudes que en ellas aparecen tienen los siguientes valores para la posición inferior del instrumento $Z_0 = 113$, $Z_1 = 20$, $Z_2 = 206$ cm y para la superior $Z_0 = 185$, $Z_1 = 92$, $Z_2 = 278$ cm respectivamente y por lo tanto $\cot \gamma = 53,8$, ya que la distancia visual para ambos instrumentos era de 50 m. Para facilitar el cálculo numérico hemos dibujado, con c como argumento, la curva correspondiente a la expresión.

$$T = \frac{\cot^2 \gamma}{100^c - 33^c \cdot 3} \left\{ \frac{1}{c+1} (Z_1^{c+1} - Z_2^{c+1}) - Z_0^c (Z_1 - Z_2) \right\}.$$

El valor de d ha sido calculado mediante la fórmula (10) con la presión barométrica y la temperatura dada en la Tabla 3. La corrección de la diferencia de altura ha sido luego determinada mediante la fórmula

$$H = T \cdot d \cdot \vartheta_1.$$

En forma parecida hemos calculado las correcciones debidas al gradiente de humedad, empleando la fórmula (6) y los valores de la humedad absoluta dados en la Tabla 3. Puesto que estas correcciones nunca sobrepasan 0,02 mm, son insignificantes al lado del efecto de la temperatura aproximadamente 50 veces mayor y por lo tanto no han sido tomados en consideración.

Como ya se ha destacado anteriormente, la influencia del ácido carbónico y de la presión atmosférica son de un orden de magnitud aun menor. Por consiguiente no se han tomado en cuenta.

En la Tabla 3 hemos reunido los datos y las magnitudes arriba mencionadas. Al número, fecha y hora de la serie de observación sigue la presión barométrica B y la temperatura media t . ϑ_1 indica la diferencia de temperatura entre las alturas 33,3 y 100 cm y ϑ_2 entre 100 y 300 cm. e_1 y e_2 indican la humedad en mm Hg a las alturas 10 y 150 cm respectivamente. Luego siguen $H_{calc.}$ y $H_{obs.}$ La magnitud que sigue es la diferencia $H_{corr.} = H_{obs.} - H_{calc.}$ que por consiguiente representa la discrepancia entre el resultado de observación corregido por la refracción nivelítica y el valor real. Al último se ha indicado la fuerza y dirección del viento, la salida y puesta del sol, si había sol o si estaba nublado.

DEDUCCION DE LAS FORMULAS

Coefficiente de refracción del aire. Entre el coeficiente de refracción (n) y los factores que sobre él influyen existe, según *Meggers* y *Peters*, ⁽¹⁾ la ecuación

$$n - 1 = \frac{0.0002923}{1 + 0.00368 \cdot t} \cdot \frac{B}{760} - 0.000041 \cdot \frac{e}{760} + \\ + 0.0000016 \cdot k \cdot \frac{B}{760},$$

en la que t significa la temperatura en °C, B la presión barométrica en mm Hg, e la presión del vapor de agua en mm Hg y k el porcentaje en volumen de ácido carbónico contenido en el aire. La fórmula vale para la longitud de onda $556 m\mu$, es decir, para el máximo de luminosidad de la luz blanca.

La magnitud absoluta de la refracción del aire no tiene aplicación en la investigación del camino del rayo de luz, sino únicamente es necesario determinar las variaciones del poder de refracción debido a varios factores. Por lo tanto formemos: 1º, la diferencial con respecto a la temperatura

$$dn = - \frac{0.0002923 \cdot 0.00368}{(1 + 0.00368 \cdot t)^2} \cdot \frac{B}{760} \cdot dt,$$

o, con suficiente aproximación,

$$dn = - \left(0.000\ 000\ 933 - 0.000\ 000\ 0064 \cdot (t - 20) \right) \frac{B}{760} \cdot dt, \quad (5)$$

(1) *W. F. Meggers and C. A. Peters: Measurement on the Index of Refraction of Air for Wave Lengths from 2218 Å to 9000 Å, Scientific Papers of the Bureau of Standards N° 327, Washington 1918.*

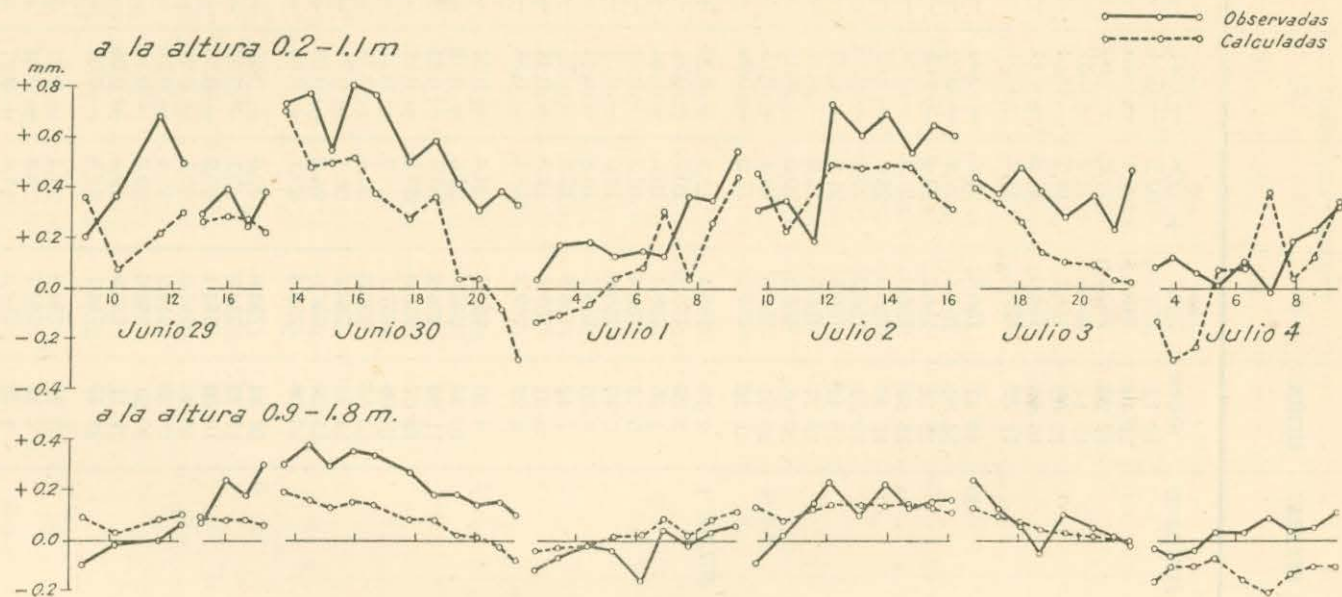


Fig. 5. Refracción nivelítica sobre el trayecto de 100 m

TABLA 3

Nº	FECHA	HORA	B	t	ϑ_1	ϑ_2	e_1	e_2
			mm				mm	mm
1	JUNIO 29	9h07m	760,7	+ 19,8	- 0,47	- 0,34	8,1	8,3
2		10 12	760,7	20,3	- 0,34	- 0,86	8,7	7,8
3		11 40	760,6	20,2	- 0,45	- 0,74	10,0	8,7
4		12 26	760,3	19,8	- 0,60	- 0,94	9,1	8,4
5		15 14	758,8	17,2	- 0,51	- 0,76	10,0	10,2
6		16 06	758,7	17,2	- 0,46	- 0,53	10,9	10,7
7		16 46	758,6	17,2	- 0,44	- 0,53	10,2	9,9
8		17 22	758,5	17,2	- 0,31	- 0,29	10,5	10,1
9	30	13 42	756,8	21,6	- 0,94	- 0,75	7,6	7,7
10		14 30	756,4	22,4	- 0,82	- 1,03	8,2	7,3
11		15 12	756,7	22,2	- 0,68	- 0,84	6,4	7,1
12		15 57	756,3	21,5	- 0,78	- 0,83	6,5	6,1
13		16 40	756,3	23,0	- 0,62	- 0,76	7,2	5,9
14		17 52	756,2	20,8	- 0,38	- 0,34	5,5	5,6
15		18 41	756,5	21,6	- 0,43	- 0,24	6,3	5,0
16		19 27	756,5	19,6	- 0,15	- 0,36	5,3	5,3
17		20 05	756,3	20,0	- 0,01	- 0,09	6,4	5,8
18		20 51	756,8	18,4	+ 0,15	+ 0,22	7,3	6,6
19		21 22	757,2	17,2	+ 0,38	+ 0,29	7,6	6,2
20	JULIO 1	2 43	758,4	11,2	+ 0,20	+ 0,17	6,4	5,8
21		3 26	758,4	10,2	+ 0,31	+ 0,03	6,9	6,6
22		4 25	758,4	10,5	+ 0,04	+ 0,15	6,5	6,5
23		5 14	758,4	12,2	- 0,01	- 0,07	6,9	6,5
24		6 10	758,6	14,0	- 0,01	- 0,20	7,2	7,0
25		6 56	758,7	16,8	- 0,46	- 0,49	6,9	7,4
26		7 42	758,8	17,8	- 0,16	- 0,38	7,0	6,6
27		8 31	759,4	17,5	- 0,46	- 0,64	7,0	7,3
28		9 22	759,3	18,7	- 0,58	- 0,49	7,1	6,6
29		9 40	756,7	23,6	- 0,66	- 0,67	12,7	12,7
30		10 38	756,9	22,6	- 0,43	- 0,65	12,3	12,1
31		11 34	756,8	23,9	- 0,64	- 0,83	12,0	11,1
32		12 07	756,9	23,5	- 0,71	- 0,70	12,2	13,1
33		13 08	757,1	24,0	- 0,71	- 0,74	11,6	10,1
34		13 58	756,5	24,4	- 0,72	- 0,73	7,9	8,9
35		14 44	756,7	25,1	- 0,78	- 0,93	9,5	10,3
36		15 30	756,5	24,2	- 0,68	- 0,99	8,9	8,5
37		16 08	756,4	23,7	- 0,64	- 1,04	9,9	10,1
38	3	16 34	754,9	22,0	- 0,65	- 0,83	13,6	13,4
39		17 22	754,8	22,1	- 0,52	- 0,59	13,6	13,5
40		18 06	754,4	20,8	- 0,35	- 0,28	13,0	12,9
41		18 44	754,2	20,5	- 0,24	- 0,27	12,6	12,3
42		19 33	754,2	19,4	- 0,15	- 0,14	12,6	12,5
43		20 31	753,6	19,6	- 0,10	- 0,06	13,0	12,7
44		21 11	753,8	19,8	- 0,08	- 0,01	15,3	15,7
45		21 47	754,1	18,8	- 0,02	- 0,01	13,1	13,3
46	4	3 21	752,8	17,4	+ 0,21	+ 0,22	13,0	13,5
47		3 55	752,7	16,6	+ 0,34	+ 0,18	11,6	13,3
48		4 42	752,3	17,9	+ 0,27	+ 0,10	13,6	13,5
49		5 24	752,3	19,2	- 0,01	- 0,20	14,9	14,9
50		6 22	752,7	19,4	- 0,23	- 0,48	14,9	14,9
51		7 10	752,7	20,6	- 0,50	- 0,38	14,6	14,3
52		7 56	753,2	20,8	- 0,28	- 0,78	14,6	14,4
53		8 38	753,2	20,1	- 0,37	- 0,80	14,4	14,0
54		9 26	753,3	20,9	- 0,65	- 0,93	14,8	14,1

TABLA 3

Instrumento inferior			Instrumento superior			VIENTO	SOL	NUBES
H _{calc.}	H _{obs.}	H _{corr.}	H _{calc.}	H _{obs.}	H _{corr.}			
mm	mm	mm	mm	mm	mm			
+ 0,36	+ 0,20	- 0,16	+ 0,09	- 0,10	- 0,19	0	Si	0
+ 0,07	+ 0,36	+ 0,29	+ 0,03	- 0,02	- 0,05	0	"	0
+ 0,21	+ 0,68	+ 0,47	+ 0,08	0,00	- 0,08	1 W	"	0
+ 0,30	+ 0,49	+ 0,19	+ 0,10	+ 0,06	- 0,04	1 "	"	4
+ 0,27	+ 0,30	+ 0,03	+ 0,09	+ 0,07	- 0,02	1 "	No	7
+ 0,30	+ 0,39	+ 0,09	+ 0,08	+ 0,24	+ 0,16	1 "	"	7
+ 0,28	+ 0,24	- 0,04	+ 0,08	+ 0,18	+ 0,10	1 "	"	7
+ 0,22	+ 0,38	+ 0,16	+ 0,06	+ 0,30	+ 0,24	1 "	"	10
+ 0,69	+ 0,73	+ 0,04	+ 0,19	+ 0,30	+ 0,11	3 W	Si	1
+ 0,47	+ 0,77	+ 0,30	+ 0,16	+ 0,38	+ 0,22	2 "	"	2
+ 0,48	+ 0,65	+ 0,17	+ 0,13	+ 0,30	+ 0,17	2 "	"	2
+ 0,50	+ 0,80	+ 0,30	+ 0,15	+ 0,35	+ 0,20	3 "	"	2
+ 0,36	+ 0,77	+ 0,41	+ 0,14	+ 0,34	+ 0,20	3 "	"	2
+ 0,27	+ 0,50	+ 0,23	+ 0,08	+ 0,27	+ 0,19	2 "	"	2
+ 0,35	+ 0,58	+ 0,23	+ 0,08	+ 0,18	+ 0,10	0	"	2
+ 0,03	+ 0,41	+ 0,38	+ 0,02	+ 0,18	+ 0,16	0	"	0
+ 0,03	+ 0,30	+ 0,27	+ 0,01	+ 0,14	+ 0,13	0	"	0
- 0,09	+ 0,38	+ 0,47	- 0,03	+ 0,15	+ 0,18	0	Puesta	0
- 0,30	+ 0,33	+ 0,63	- 0,08	+ 0,10	+ 0,18	0	No	0
- 0,15	+ 0,03	+ 0,18	- 0,04	- 0,12	- 0,08	0	No	0
- 0,12	+ 0,16	+ 0,28	- 0,03	- 0,07	- 0,04	0	"	0
- 0,07	+ 0,18	+ 0,25	- 0,02	- 0,02	0,00	0	Salida	0
+ 0,03	+ 0,12	+ 0,09	+ 0,01	- 0,04	- 0,05	1 N	Si	0
+ 0,07	+ 0,14	+ 0,07	+ 0,02	- 0,16	- 0,18	1 "	"	0
+ 0,31	+ 0,12	- 0,19	+ 0,08	+ 0,04	- 0,04	1 "	"	0
+ 0,03	+ 0,36	+ 0,33	+ 0,02	- 0,02	- 0,04	1 "	"	3
+ 0,25	+ 0,34	+ 0,09	+ 0,08	+ 0,03	- 0,05	1 "	"	2
+ 0,43	+ 0,54	+ 0,11	+ 0,11	+ 0,06	- 0,05	1 "	"	2
+ 0,44	+ 0,30	- 0,14	+ 0,13	- 0,09	- 0,22	2 E	Si	0
+ 0,22	+ 0,34	+ 0,12	+ 0,08	+ 0,02	- 0,06	0	"	0
+ 0,36	+ 0,18	- 0,18	+ 0,12	+ 0,14	+ 0,02	0	No	1
+ 0,47	+ 0,72	+ 0,25	+ 0,14	+ 0,23	+ 0,09	1 E	"	2
+ 0,45	+ 0,60	+ 0,15	+ 0,14	+ 0,10	0,04	1 "	Si	1
+ 0,46	+ 0,68	+ 0,22	+ 0,14	+ 0,22	+ 0,08	1 "	"	1
+ 0,45	+ 0,53	+ 0,08	+ 0,14	+ 0,13	- 0,01	1 "	"	1
+ 0,35	+ 0,64	+ 0,29	+ 0,13	+ 0,15	+ 0,02	1 "	"	0
+ 0,31	+ 0,60	+ 0,29	+ 0,11	+ 0,16	+ 0,05	1 "	"	0
+ 0,38	+ 0,43	+ 0,05	+ 0,13	+ 0,24	+ 0,11	2 E	Si	1
+ 0,32	+ 0,37	+ 0,05	+ 0,10	+ 0,12	+ 0,02	2 "	"	3
+ 0,25	+ 0,47	+ 0,22	+ 0,07	+ 0,06	- 0,01	2 "	"	3
+ 0,14	+ 0,38	+ 0,24	+ 0,04	- 0,05	- 0,09	1 "	No	8
+ 0,10	+ 0,28	+ 0,18	+ 0,03	+ 0,10	+ 0,07	1 "	"	9
+ 0,08	+ 0,36	+ 0,28	+ 0,02	+ 0,05	+ 0,03	1 "	"	10
+ 0,03	+ 0,23	+ 0,20	+ 0,01	+ 0,02	+ 0,01	1 "	"	6
+ 0,02	+ 0,46	+ 0,44	0,00	- 0,02	- 0,02	1 "	"	4
- 0,14	+ 0,08	+ 0,22	- 0,03	- 0,16	- 0,13	0	No	2
- 0,29	+ 0,12	+ 0,41	- 0,06	- 0,10	- 0,04	0	"	2
- 0,24	+ 0,06	+ 0,30	- 0,04	- 0,10	- 0,06	0	Salida	3
+ 0,07	+ 0,01	- 0,06	+ 0,03	- 0,07	- 0,10	0	Si	3
+ 0,08	+ 0,10	+ 0,02	+ 0,03	- 0,16	- 0,19	0	"	3
+ 0,38	- 0,02	- 0,40	+ 0,09	- 0,20	- 0,29	0	"	0
+ 0,03	+ 0,18	+ 0,15	+ 0,04	- 0,13	- 0,17	0	"	0
+ 0,12	+ 0,23	+ 0,11	+ 0,05	- 0,10	- 0,15	0	"	0
+ 0,34	+ 0,32	- 0,02	+ 0,11	- 0,10	- 0,21	0	"	0

Evaluación de los resultados. En la Tabla 4 hemos dado para cada día y para ambas posiciones del instrumento los valores medios cuadráticos de las diferencias $H_{obs.}$ directamente observadas, con respecto al valor real y a continuación el valor medio cuadrático de las diferencias $H_{corr.}$ corregidas con la corrección $H_{cal.}$ De esto se deduce que aplicando la corrección debida a la refracción nivelítica la discrepancia es considerablemente reducida, especialmente en la posición inferior del instrumento, en donde el efecto es mayor. Si se tiene en cuenta que el error de bisección durante el trabajo normal en campaña es de $\pm 0,08$ mm aproximadamente, los errores residuales $\pm 0,251$ y $\pm 0,126$ mm respectivamente se explican bastante bien mediante la pequeña altura de la visual y las condiciones especialmente desfavorables que predominan alrededor del mediodía.

TABLA 4

Fecha	Instrumento inferior		Instrumento superior	
	$H_{obs.}$	$H_{corr.}$	$H_{obs.}$	$H_{corr.}$
	mm	mm	mm	mm
Junio 29	0,41	0,22	0,16	0,13
30	0,59	0,35	0,26	0,17
Julio 1	0,27	0,20	0,08	0,08
2	0,54	0,20	0,15	0,09
3	0,38	0,24	0,12	0,06
4	0,16	0,24	0,13	0,17
Por día	0,427	0,251	0,163	0,126

A fin de obtener una mayor claridad de los resultados dados hemos dibujado todavía en figura 5 (pág. 39) las magnitudes $H_{obs.}$ y $H_{calc.}$ para ambas posiciones del instrumento. Se nota una buena concordancia entre las correcciones determinadas empíricamente y aquellas determinadas en forma teórica. Especialmente llama la atención la marcha paralela de ambas correcciones.

ENSAYOS EN UN TRAYECTO DE 1958 m

Ejecución de las observaciones. Las observaciones descriptas en el capítulo anterior se habían realizado en una sola estación del instrumento. Deseábamos utilizar más ampliamente las experiencias adquiridas y ejecutar en base de ellas ensayos que se parezcan lo más posible a los trabajos regulares en campaña. Las observaciones fueron ejecutadas entre el 9 y el 17 de junio de 1937.

A este fin hemos elegido un trayecto entre los puntos fijos 70 y 36045 de la nivelación general de Finlandia.

La longitud del trayecto era de 1958 m y el punto fijo 36045 se encontraba a 18 m de altura encima del punto fijo 70. La línea de nivelación seguía a la vía férrea entre las estaciones Nummela y Lohja, que se encontraban a unos 50 km al NW de Helsinki.

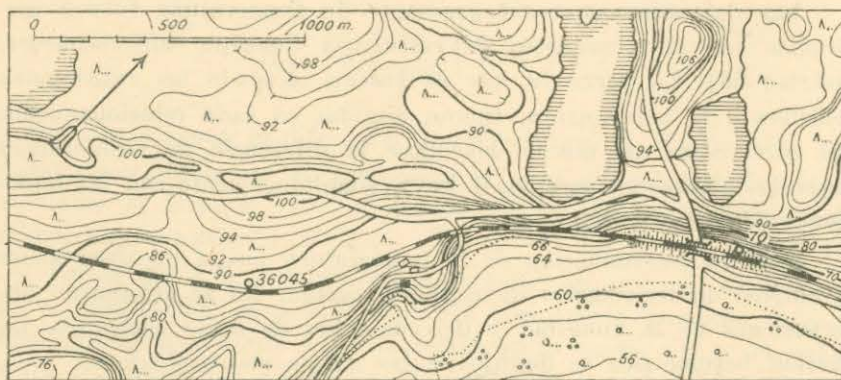


Fig. 6 Trayecto de ensayo de 1958 m

La topografía del lugar se advierte en la figura 6. La vía férrea sube una pequeña cuchilla arenosa que corre en dirección NE-SW y en tal lugar asciende en la cuesta sur, muy uniformemente como puede verse en las diferencias de altura de la Tabla 5. Cerca del

punto fijo 70 se encuentra un terraplén de aproximadamente 12 m de altura a través del cual, por medio de un túnel se ha trazado una carretera. El bosque al sur de la vía, entre este paso y la estancia que se ve en el dibujo, ofrece suficiente protección contra el viento y el sol. Desde el túnel hasta el punto fijo 36045 la línea férrea corre a través de un bosque ralo. El balasto de la vía consiste en arena fina.

El método de observación durante la nivelación fué el comúnmente empleado. Para la observación se empleó un instrumento de nivelación A de *Zeiss* y un par de miras invar de la misma casa. Las distancias entre los instrumentos y las miras se midieron, con una cinta metálica. El trayecto en cuestión fué nivelado a diferentes horas del día, en que el trabajo pudo ejecutarse sin luz artificial. En 20 nivelaciones tuvimos visuales de 100 m de largo y en 6 de 50 m.

El valor real de la diferencia de altura de los puntos fijos 70 y 36045 fué determinado dos veces (el 12 y 16 de julio). En ello trabajaron dos observadores simultáneamente, cada uno con un instrumento y con el par de miras en común. Para reducir en lo posible la influencia de la refracción se empleó una distancia visual de 25 m. Los resultados de ambos días fueron +18441,84 y +18442,00 mm y los obtenidos por cada uno de los dos observadores +18441,88 y +18441,96 mm respectivamente, habiéndose tomado en consideración la refracción nivelítica +0,12 y +0,03 mm y la corrección de las miras +0,45 y +0,48 mm respectivamente. Por lo tanto el valor real es de +18441,92 mm. El error del valor real no ha de sobrepasar $\pm 0,3$ mm.

Las determinaciones del gradiente de temperatura fueron ejecutadas con el termómetro de resistencia descripto anteriormente. (página 23). La barra en que se habían colocado las resistencias sensibles a la temperatura, fueron erigidas en cada estacionamiento del nivel cerca del mismo, leyéndose la diferencia de temperatura entre las alturas en cuestión 4 veces, simultáneamente con las biseciones de la nivelación.

Para la determinación de la temperatura media de observación se empleó un termómetro de mercurio común. No se efectuaron observaciones de la humedad y del contenido de ácido carbónico. La presión barométrica se dedujo de las cartas meteorológicas.

Elaboración de las observaciones. Las diferencias de alturas se han reducido aplicando la corrección del metro de la mira. La diferencia $h_{obs.}$ entre el resultado de las observaciones y el valor real se ha dado en el sentido de *lo que debe ser menos lo que es*.

La corrección nivelítica de la refracción $h_{calc.}$ se ha determinado en cada estacionamiento del instrumento, sumando las correccio-

nes H_{calc} . Para la evaluación de H_{calc} hemos calculado en primer término los factores que aparecen en las fórmulas (11) y (12)

$$D_1 = \frac{\cot^2 \gamma_1}{z_2^c - z_1^c} \left\{ \frac{1}{c+1} Z_1^{c+1} - Z_0^c Z_1 + \frac{c}{c+1} Z_0^{c+1} \right\} \quad (22)$$

$$D_2 = \frac{\cot^2 \gamma_2}{z_2^c - z_1^c} \left\{ \frac{1}{c+1} Z_2^{c+1} - Z_0^c Z_2 + \frac{c}{c+1} Z_0^{c+1} \right\} \quad (23)$$

respectivamente, para algunos valores determinados de c y Z_1 , Z_2 respectivamente y para la distancia visual de 100 m. La altura del instrumento Z_0 se ha mantenido en 155 cm durante el trabajo. Los termómetros de resistencia se hallaban fijados a la varilla a las alturas 35 y 260 cm. Por lo tanto tenemos los valores $z_1 = 35$ y $z_2 = 260$ cm. Los valores de D obtenidos se han representado, tomando a Z como argumento, por un haz de curvas en el que cada curva corresponde a un valor de c de $-0,6$, $-0,5$, ..., $+0,4$ respectivamente. Los valores Z_1 y Z_2 necesarios para la lectura del valor de D aparecen en el material de observación y c se obtiene en función de los valores de $Best$ (Tabla 2, página 20) si éstos se reducen primero para nuestro lugar de observación ($\lambda = 24^\circ 2' E$, $\varphi = 60^\circ 3' N$). Para la refracción nivelítica en una estación del instrumento

$$H_{calc} = \left(\frac{s}{100} \right)^2 \cdot \vartheta \cdot d \cdot D$$

se necesita, además, la diferencia de temperatura ϑ , que ha sido medida directamente, y el coeficiente d , que se calcula fácilmente mediante la fórmula (10). Como ejemplo damos en la Tabla 5 el cálculo de la medición N° 3.

En la Tabla 6 se han recopilado todos los ensayos. Al número de la observación sigue la fecha y la hora, como asimismo la presión barométrica media (B), la temperatura media (t) y el valor medio (ϑ_m) de las diferencias de temperatura (ϑ) en todas las estaciones del instrumento. En las primeras 9 estaciones del instrumento correspondientes a las mediciones 1-20, la distancia visual era de 100 m y en la última estación de 80 m aproximadamente; en las 2 primeras estaciones de los ensayos 21-26 la distancia visual era de 50 m y en la última de 30 m. La dirección de la medición cuesta arriba, es decir, desde el punto fijo 70 al punto fijo 36045 ha sido señalada con el término "arriba" y la opuesta con el término "abajo".

TABLE 5

$$d = 0,893 \cdot 10^{-6}, \quad c_{\text{principal}} = -0,2, \quad c_{\text{fin}} = -0,15$$

N°	s	Z ₁	Z ₂	θ	$\left(\frac{s}{100}\right)^2$	D ₁ · 10 ⁶	D ₂ · 10 ⁶	H ₁	H ₂	H ₁ - H ₂
	m	cm	cm			mm	mm	mm	mm	mm
1	100	67	221	-2,09	1,00	+1,99	+1,25	+3,71	+2,34	+1,37
2	100	23	280	-1,48	1,00	+2,70	+1,12	+3,57	+1,48	+2,09
3	100	31	288	-1,43	1,00	+2,41	+1,11	+3,08	+1,42	+1,66
4	100	76	254	-2,86	1,00	+1,87	+1,19	+4,79	+3,05	+1,74
5	100	67	188	-1,38	1,00	+1,99	+1,37	+2,45	+1,69	+0,76
6	100	70	260	-1,32	1,00	+1,95	+1,20	+2,30	+1,42	+0,88
7	100	57	259	-1,21	1,00	+2,10	+1,20	+2,27	+1,30	+0,97
8	100	79	234	-1,43	1,00	+1,86	+1,24	+2,37	+1,58	+0,79
9	100	51	282	-1,43	1,00	+2,14	+1,16	+2,73	+1,48	+1,25
10	81	105	203	-1,10	0,66	+1,71	+1,34	+1,11	+0,87	+0,24

$$h_{\text{eff}} = +11,75$$

TABLA 6

Nº.	1987 junio	HORA	B	t	ϑ_m	Dirección	h_{obs}	$h_{calc.}$	$h_{corr.}$	Viento	Sol	Nubes
			mm Hg				mm	mm	mm			
1	9	8 ^h 43 ^m - 10 ^h 24 ^m	759	+ 25°	- 1° 97	arriba	+ 8,55	+ 12,53	+ 3,98	3 S	si	0
2	"	10 32 12 13	758	28	- 2,17	abajo	+ 7,65	+ 10,82	+ 3,17	4 S	"	0
3	"	13 44 15 19	758	26	- 1,57	arriba	+ 10,70	+ 11,75	+ 1,05	5SW	"	0
4	"	15 23 16 28	758	26	- 1,43	abajo	+ 5,50	+ 9,48	+ 3,98	4SW	"	0
5	10	8 28 9 34	759	23	- 1,37	arriba	+ 5,89	+ 10,63	+ 4,74	2 S	"	0
6	"	9 41 10 50	759	25	- 1,51	abajo	+ 6,49	+ 11,00	+ 4,51	3 S	"	0
7	12	6 11 7 34	752	18	- 0,45	arriba	+ 1,77	+ 3,63	+ 1,86	1SW	por momentos	7
8	14	16 34 17 54	762	20	- 0,96	abajo	+ 4,25	+ 6,74	+ 2,49	2 E	"	8
9	"	18 00 18 58	762	18	- 0,47	arriba	+ 4,20	+ 3,83	- 0,37	2 E	no	9
10	"	18 59 19 55	761	18	- 0,49	abajo	+ 4,35	+ 3,43	- 0,92	1 E	"	4
11	"	19 57 21 04	761	16	- 0,07	arriba	+ 2,45	+ 0,20	- 2,25	1 E	"	4
12	"	21 06 22 10	761	14	+ 0,56	abajo	- 2,15	- 3,67	- 1,52	0	"	2
13	15	10 09 11 35	760	24	- 1,38	arriba	+ 7,15	+ 10,30	+ 3,15	1 E	si	3
14	"	11 39 12 47	760	24	- 1,09	abajo	+ 8,50	+ 8,09	- 0,41	1 E	"	3
15	"	14 05 15 07	759	25	- 0,71	arriba	+ 10,25	+ 5,00	- 5,25	1 S	por momentos	8
16	"	15 07 16 06	759	26	- 0,49	abajo	+ 5,45	+ 3,23	- 2,22	1 S	no	8
17	17	2 45 3 52	755	13	- 0,30	arriba	+ 1,23	- 1,87	- 3,10	0	por momentos	8
18	"	3 54 4 55	755	15	+ 0,04	abajo	+ 2,88	- 0,29	- 3,17	0	"	9
19	"	19 11 20 11	753	20	- 0,30	arriba	+ 4,23	+ 1,75	- 2,48	3 S	no	10
20	"	20 15 21 13	753	20	- 0,14	abajo	- 1,67	+ 0,80	+ 2,47	2 S	"	10
21	10	12 07 13 39	758	28	- 1,71	arriba	+ 4,59	+ 2,87	- 1,72	4SW	si	0
22	"	13 43 15 17	758	28	- 1,42	abajo	+ 1,84	+ 2,40	+ 0,56	4SW	"	1
23	11	8 29 9 53	755	25	- 1,34	arriba	+ 0,38	+ 2,39	+ 2,01	2SW	"	2
24	"	9 57 11 31	755	28	- 1,94	abajo	+ 2,18	+ 2,80	+ 0,62	3SW	"	2
25	"	12 51 14 20	754	29	- 1,30	arriba	+ 4,23	+ 2,12	- 2,11	4SW	"	0
26	"	14 27 16 05	753	28	- 1,42	abajo	+ 0,73	+ 2,27	+ 1,54	4SW	"	1

Luego siguen las diferencias observadas, calculadas y corregidas con respecto al valor real. En las últimas columnas se han indicado las condiciones atmosféricas en la misma forma que en la Tabla 3.

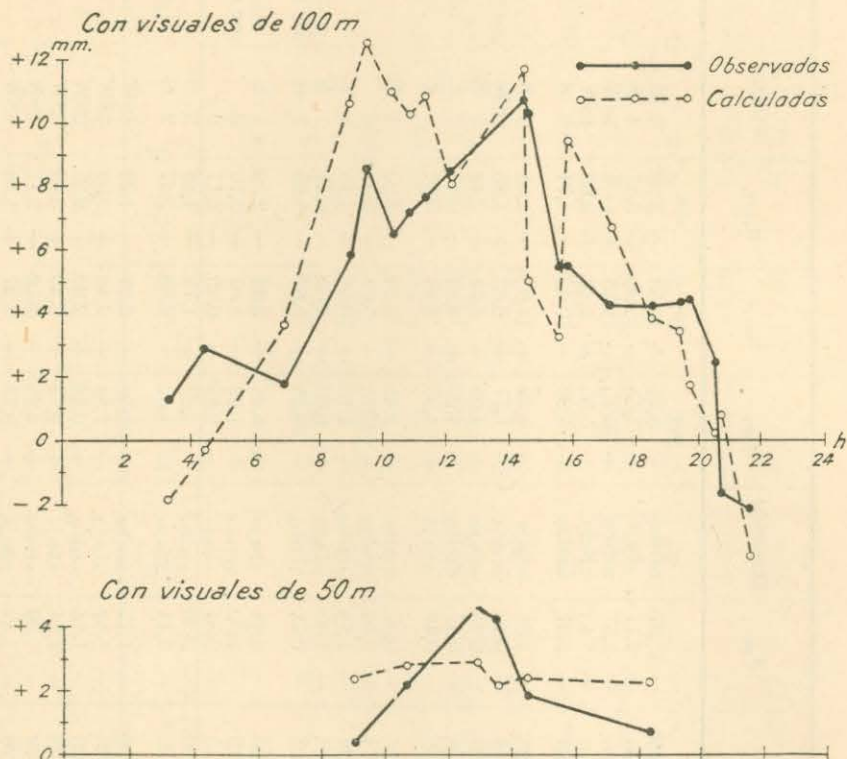


Fig. 7 Refracción nivelítica sobre un trayecto de 1938 m

Evaluación de los resultados. Para poder formarnos un concepto de los resultados obtenidos calculamos los valores medios aritméticos de las discrepancias corregidas y no corregidas:

s	en m	100	50
$h_{obs.}$	en mm	+ 4.88	+ 2.32
$h_{corr.}$	en mm	+ 0.49	+ 0.15

Estas cifras muestran que si se emplea la corrección calculada del gradiente de temperatura la refracción nivelítica es eliminada del resultado de la nivelación.

Aun formamos los valores medios cuadráticos de las discrepancias corregidas y no corregidas:

<i>s</i>	<i>en m</i>	100	50
$h_{obs.}$	<i>en mm</i>	5.96	2.82
$h_{corr.}$	<i>en mm</i>	2.98	1.56

Debe llamarse la atención sobre el hecho de que la discrepancia media correspondiente a las dos distancias visuales empleadas, se ha reducido a la mitad. Esto demuestra que la corrección $h_{calc.}$, calculada en función del gradiente de temperatura, representa la parte esencial del error de nivelación $h_{obs.}$. El hecho de que el error h_{corr} residual es mayor que el común en la nivelación de precisión, está fácilmente justificado por la hora del día sumamente desfavorable para la nivelación, a lo que en el primer caso se suma la distancia visual extraordinariamente grande.

La buena concordancia de los valores de la refracción nivelítica observados $h_{obs.}$ con los calculados en función del gradiente de temperatura $h_{calc.}$, resalta en la figura 7, en la que se han dibujado estos valores tomando la hora del día como argumento. Esta figura y la 5 muestran una marcha diaria completamente definida de la refracción nivelítica a pesar de que los valores empleados están grandemente influenciados por las condiciones atmosféricas reinantes.

INFLUENCIA DE LA REFRACCION NIVELITICA SOBRE EL TRABAJO COMUN EN CAMPAÑA

Consideraciones generales. Analicemos ahora la forma en que influye la refracción nivelítica sobre los resultados de la nivelación común. Una gran refracción nivelítica no tiene influencia sobre las diferencias de las mediciones ida y vuelta si ambas mediciones han sido ejecutadas en las mismas condiciones, es decir, si el gradiente de temperatura ha sido el mismo y las longitudes de las visuales se han correspondido. Esto, en grandes rasgos, concuerda con el trabajo corriente de campaña. Unicamente cuando las observaciones han sido ejecutadas alrededor del mediodía, al amanecer o al anochecer, la refracción nivelítica puede influenciar las diferencias. Esto vale para las diferencias de las mediciones ida y vuelta, tanto para los tiros entre puntos fijos como en líneas de nivelación más largas.

Para la diferencia de altura medida, la refracción nivelítica causa una corrección que depende del gradiente de temperatura, del largo de la visual y de la diferencia de altura medida. Si en el transcurso de las mediciones ha predominado durante un largo trayecto un gradiente de temperatura aproximadamente igual y se han empleado visuales del mismo largo, en este trayecto la corrección es aproximadamente proporcional a la diferencia de altura medida. Por lo tanto este fenómeno se representa como un error de escala.

La refracción nivelítica se hace notar en los errores de cierre de los polígonos sólo en los días en que el error de escala, dependiente del gradiente de temperatura y del largo de la visual, es distinto en distintas partes del polígono.

En base a lo anteriormente expresado puede decirse que la refracción nivelítica en su parte más importante, se presenta en los resultados de la nivelación como error de escala y en medida menos importante como diferencia de la medición ida y vuelta, siendo sólo posible determinarla mediante un cálculo directo en función del gradiente de temperatura.

Refracción nivelítica en la antigua nivelación fundamental de Finlandia. El trabajo descrito en el capítulo anterior ha sido ejecutado bajo condiciones no comunes en la nivelación de Finlandia. En primer término, en esta medición experimental también se ha trabajado al mediodía, cuando la refracción nivelítica tiene su valor máximo, y en segundo término, la pendiente del trayecto experimental es considerablemente mayor a lo que comúnmente se presenta en las líneas de nivelación de precisión finlandesas.

Para obtener ciertos datos experimentales en el trabajo regular en campaña, hemos observado también en el verano de 1937 el gradiente de temperatura conjuntamente con la nivelación de precisión común. La línea en cuestión tiene 90 km de largo y en terreno tan llano que la máxima diferencia de altura sólo es de 45 m. El tiempo de observación se limitaba a 3 horas después de la salida del sol y a 3 horas antes de la puesta. A causa de estas disposiciones y condiciones favorables para la nivelación, la corrección debida a la refracción sólo ascendió a 3 mm; no poniéndose de manifiesto una reducción de los errores de nivelación calculados en base a mediciones ida y vuelta.

Esta aplicación restringida a un sólo lado del polígono enseña bastante poco. Por tal motivo, hemos calculado la refracción nivelítica en la extensa red de la antigua nivelación de Finlandia (1). A continuación determinaremos la influencia de la refracción nivelítica sobre los errores de cierre y sobre la escala altimétrica. Satisfaciendo nuestro pedido la Oficina Hidrográfica Finlandesa puso gentilmente a nuestra disposición los correspondientes protocolos de observación.

Esta nivelación comprende toda la parte sur de Finlandia (figura 8). Comprende 11 polígonos cerrados cuyos perímetros oscilan entre 126 y 808 km. La longitud completa de las líneas medidas es de 3966 km. Los puntos fijos se encuentran a distancia de 2 km aproximadamente. Todas las líneas se han nivelado en ambas direcciones.

La compensación de la red se ha efectuado empleando el peso $\frac{1}{L \mu_1^2}$ para cada lado del polígono; indicando L la longitud del lado y μ_1 su error medio accidental. Sin embargo, hemos calculado nuevamente esta compensación con un peso $\frac{1}{L}$, lo que corresponderá

(1) *Edv. Blomqvist u. Henrik Renqvist: Das Präcisionsnivellement Finnlands 1892-1910. Bulletin de la Société de Géographie de Finlande, Fennia 31, Nr. 2, Helsinki 1910.*

mejor al verdadero peso del lado del polígono. Las correcciones (v) obtenidas para los lados del polígono se dan en la Tabla 7.

El cálculo de la refracción nivelítica para observaciones en las que no se han ejecutado determinaciones del gradiente de temperatura ofrecen ciertas dificultades y no debe esperarse demasiada precisión en su resultado. Para la investigación de la refracción en cada trayecto de punto fijo a punto fijo disponemos de la fecha, la hora, datos sobre las condiciones atmosféricas, especialmente sobre las nubes, y las alturas de las visuales en las miras de adelante y de atrás.

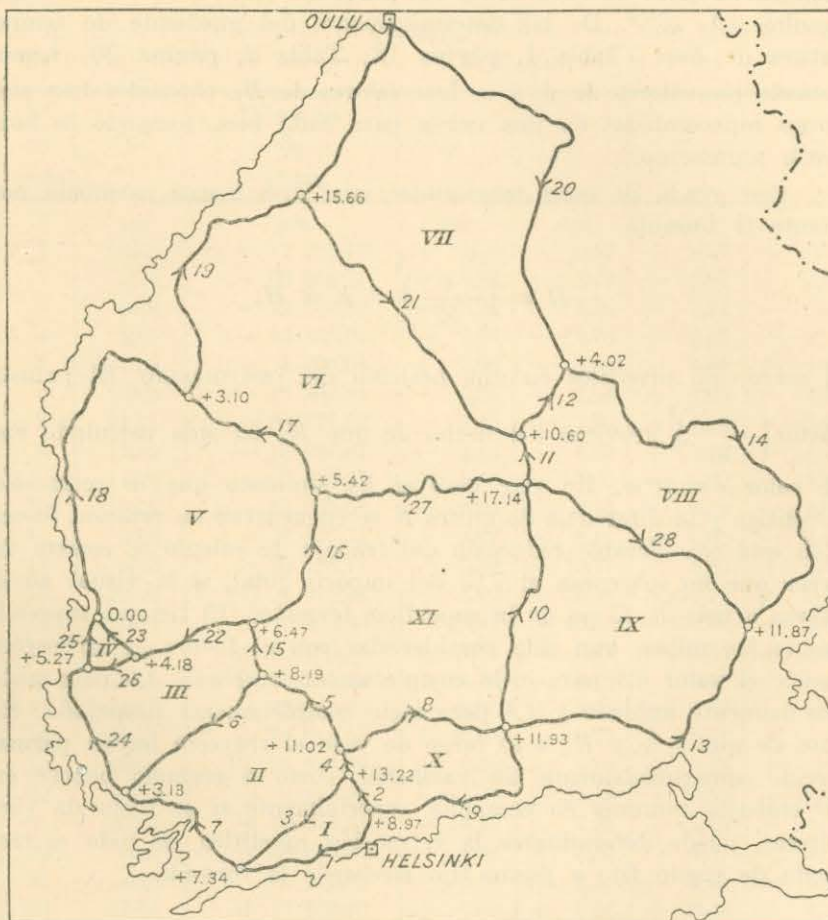


Fig. 8. Red de la antigua nivelación fundamental de Finlandia. Los números junto a los puntos nodales dan la corrección de refracción en mm, que para el punto más bajo fué considerada igual a 0,00

La influencia de la refracción es determinada mediante la fórmula (14). Se ha elegido esta fórmula en lugar de las (11), (12) y (13), debido a que con ella se ahorra mucho trabajo de cálculo. Primero se calcula una magnitud auxiliar

$$H_0 = \frac{0.009 \cdot \vartheta}{z_2^c - z_1^c} \left\{ \frac{1}{c+1} (205^{c+1} - 105^{c+1}) - 100 \cdot 155^c \right\},$$

siendo el largo de la visual $s = 50 \text{ m}$, la altura del instrumento $Z_0 = 155 \text{ cm}$, la diferencia de altura $Z_2 - Z_1 = 100 \text{ cm}$; habiéndose calculado el valor de d para la temperatura media $+15^\circ\text{C}$ y la presión barométrica de 760 mm Hg mediante la fórmula (10); valor que resultó $0,9 \cdot 10^{-6}$. De las determinaciones del gradiente de temperatura de *Best* (Tabla 1, página 18; Tabla 2, página 20) hemos tomado los valores de ϑ y c . Los valores de H_0 obtenidos han sido luego representados en una curva para cada mes, tomando la hora como argumento.

Con ayuda de estas magnitudes auxiliares hemos calculado mediante la fórmula

$$H = \left(\frac{s}{50} \right)^2 \cdot K w H_0$$

la corrección nivelítica en una posición del instrumento. El primer factor $\left(\frac{s}{50} \right)^2$ proviene del hecho de que H_0 ha sido calculado con el valor $s = 50 \text{ m}$. En este caso se ha supuesto que la refracción nivelítica y la diferencia de altura K se encuentran en relación lineal. Con esta considerable reducción del trabajo de cálculo se comete un error que no sobrepasa el 7 % del importe total, si la visual no se acerca a más de 75 cm de la superficie terrestre. El tiempo, especialmente las nubes, han sido consideradas con el factor w , atribuyéndosele el valor $0,5$ para cielo completamente nublado, $1,0$ para cielo parcialmente nublado y $1,5$ para cielo completamente despejado. En caso de que s , w y H_0 a lo largo de todo el trayecto hayan permanecido aproximadamente sin variación, como a menudo ocurre en los trabajos comunes en campaña, especialmente si se trata de vías férreas, puede determinarse la refracción nivelítica en todo el trayecto de punto fijo a punto fijo mediante la fórmula

$$H = \left(\frac{s}{50} \right)^2 \cdot k w H_0$$

en la que k indica la diferencia de altura de los puntos extremos del proyecto.

El valor medio q de la refracción nivelítica de la medición en ambas direcciones está dada en la Tabla 7 para los 28 lados de polígonos correspondientes.

Con estas correcciones de refracción q , que se basan en la estación y hora en que se han efectuado las observaciones, hemos corregido cada lado de polígono. Empleando estas diferencias de altura corregidas se ha ejecutado nuevamente la compensación de la red. Tanto las correcciones de compensación v' de los lados de los polígonos obtenidas, como las correcciones de refracción compensadas q_0 de los mismos han sido indicadas en la Tabla 7.

TABLA 7

N° del lado	L	Diferencia de altura	q	v	v'	q_0
	km	mm	mm	mm	mm	mm
1	105,9	— 2 225,75	+ 1,15	+ 9,45	+ 9,07	+ 0,77
2	29,2	+ 69 858,07	+ 3,84	— 3,76	— 2,97	+ 4,63
3	94,3	— 72 064,05	— 3,21	— 6,56	— 7,21	— 3,86
4	12,6	— 24 758,84	— 2,66	— 0,78	— 0,33	— 2,21
5	75,3	— 1 722,08	+ 0,30	— 7,98	— 5,39	+ 2,89
6	125,8	— 76 360,82	— 5,26	+ 4,63	+ 2,65	— 7,24
7	117,1	— 30 777,52	— 1,48	+ 2,26	+ 1,04	— 2,70
8	119,2	— 18 396,67	— 1,13	+ 5,55	+ 5,49	— 1,19
9	173,2	— 26 696,57	— 5,33	— 7,00	— 2,90	— 1,23
10	183,7	+ 53 895,06	+ 3,04	+ 3,74	+ 3,58	+ 2,88
11	39,3	— 17 146,71	— 2,88	— 5,25	— 5,05	— 2,68
12	65,5	— 20 108,17	— 0,82	— 10,77	— 9,80	+ 0,15
13	234,2	+ 1 071,22	+ 1,90	+ 15,61	+ 10,17	— 3,54
14	360,4	— 15 500,26	— 13,91	— 40,81	— 30,79	— 3,89
15	41,1	+ 10 738,25	+ 1,30	— 5,87	— 3,81	+ 3,36
16	114,5	+ 25 435,48	+ 1,99	— 8,53	— 5,15	+ 5,37
17	119,2	— 79 952,25	— 8,90	+ 4,07	+ 7,39	— 5,58
18	293,7	+ 39 013,55	+ 10,02	— 3,77	— 5,31	+ 8,48
19	195,1	+ 33 829,39	+ 0,26	+ 4,16	+ 8,59	+ 4,69
20	487,2	+ 9 897,96	— 17,91	+ 24,18	+ 30,52	— 11,57
21	255,4	+ 30 048,33	— 14,18	— 7,25	— 4,79	— 11,72
22	95,0	— 58 395,67	— 7,32	— 6,55	— 4,57	— 5,34
23	40,5	— 35 126,39	— 3,54	— 2,40	— 2,21	— 3,35
24	116,4	+ 11 685,20	+ 7,80	+ 6,50	+ 3,48	+ 4,78
25	51,1	— 18 136,55	— 2,36	+ 2,41	+ 1,90	— 2,87
26	34,4	— 16 994,35	— 1,02	— 0,30	+ 0,24	— 0,48
27	184,1	+ 1 098,35	— 10,20	— 19,94	— 19,67	— 9,93
28	202,9	— 52 821,44	— 5,49	+ 9,47	+ 8,54	— 6,42

En la Tabla 8, al lado del perímetro de toda la red y de los errores de cierre (f) de los 11 polígonos, obtenidos mediante las diferencias de altura no corregidas, se dan las correspondientes magnitudes (f'), después de efectuada la corrección por refracción.

TABLA 8

Nº. del polígono	L	f	f'
	km	mm	mm
I	229,4	- 19,77	- 19,25
II	425,1	+ 0,17	+ 3,10
III	412,7	- 23,85	- 14,27
IV	126,0	- 4,51	- 4,35
V	662,9	+ 8,26	+ 14,33
VI	793,1	- 26,17	- 35,91
VII	808,1	- 42,20	- 45,11
VIII	668,1	+ 66,30	+ 54,18
IX	620,8	+ 2,40	- 1,95
X	334,2	+ 5,99	+ 0,71
XI	717,9	+ 51,61	+ 43,09
perímetro	2134,3	+ 18,23	- 5,43

Basándonos en estos valores podemos apreciar la influencia de la refracción nivelítica en la correspondiente red de nivelación. Investigaremos si esta corrección ha aumentado la precisión de la red. Como ya se ha mencionado anteriormente sólo en los errores de cierre de los polígonos de nivelación debe esperarse alguna mejora perceptible, mientras que la refracción nivelítica no tiene influencia efectiva en la diferencias de las mediciones de ida y vuelta.

Entre las fórmulas internacionales de errores de la nivelación únicamente la tercera fórmula contiene el error de cierre de polígono. De esta expresión

$$\mu_3^2 = \frac{1}{\sum L^2} \left[\frac{1}{2} \sum f^2 - \mu_1^2 \sum L \right]$$

resulta el error sistemático, sin corrección de la refracción, $\mu_3 = \pm 0,0035 \text{ mm/km}$ y $\mu_3' = \pm 0,0013 \text{ mm/km}$ tomando aquélla en consideración. Por lo tanto la corrección de la refracción nivelítica en este caso ha reducido el error sistemático a un tercio.

Una representación más correcta suministra la fórmula (1)

$$E^2 = \frac{1}{n_L + 1} \left[n_L \frac{\sum f^2}{\sum L} + \frac{f^2}{L} \right]$$

en la que L indica el perímetro de cada polígono y n_L el número de éstos. El segundo término entre corchetes contiene el perímetro de toda la red. Empleando esta fórmula se obtienen los errores totales $\pm 1,31 \text{ mm/km}$ para observaciones no corregidas por refracción y $\pm 1,20 \text{ mm/km}$ para observaciones mejoradas con la corrección de la refracción. También en este caso puede percibirse una reducción del error, la que es considerable si se toma en cuenta que los errores totales encierran un error accidental relativamente grande $\mu_1 = \pm 1,08 \text{ mm/km}$.

A pesar de que debió emplearse en nuestro caso un procedimiento de cálculo algo superficial y que el terreno en cuestión era llano, el empleo de la corrección por refracción ha aumentado la precisión de la correspondiente red.

La influencia de la refracción nivelítica sobre las cotas altimétricas ha sido tomada en consideración en los valores q_0 suministrados en la Tabla 7. La corrección de las cotas de los puntos nodales de la red se han consignado en la figura 8. Se observa que estas correcciones son del mismo orden de magnitud que los errores totales de las cotas de la red correspondiente, a pesar de que en estos puntos el terreno llega a una altura de 150 m como máximo. La corrección media debida a la refracción nivelítica en la nivelación de Finlandia investigada es de aproximadamente $+0,1 \text{ mm}$ para una diferencia de altura de $+1 \text{ m}$.

(1) *Jean Vignal*: Evaluation de la précision d'une méthode de nivellement. Bulletin géodésique N° 49, 1936.

RESUMEN

De las consideraciones microclimáticas que anteceden, como así también de los trabajos de nivelación, se deducen ciertas conclusiones.

La refracción nivelítica depende esencialmente del gradiente de temperatura, mientras que las variaciones de los demás factores microclimáticos, humedad, presión atmosférica y contenido de ácido carbónico sólo tienen una influencia sobre la refracción, que importan un reducido tanto por ciento del efecto de la temperatura, y por lo tanto pueden despreciarse.

La refracción del aire causa tanto variaciones accidentales como sistemáticas en la marcha del rayo de luz. Fenómenos accidentales: la rápida vibración que es tanto más grande cuanto más grande es el gradiente de temperatura y la oscilación lenta que se presenta con gradientes de temperatura positivos, especialmente en días de calma, la que no pueden tomarse en cuenta mediante el cálculo y sólo pueden ser eliminadas en la mejor forma posible mediante un método adecuado de medición.

La refracción nivelítica sistemática es una magnitud que puede calcularse en función del gradiente de temperatura.

De las fórmulas deducidas resulta que la refracción nivelítica es proporcional al gradiente de temperatura, al cuadrado de la distancia visual y aproximadamente proporcional a la diferencia de altura medida.

La refracción nivelítica llega a su valor máximo al mediodía, sus valores cero sobrevienen aproximadamente una hora después de la salida del sol y una hora antes de la puesta. Durante la noche la refracción aumenta hasta llegar a la mitad del valor de mediodía, pero tiene entonces signo opuesto. A causa de la refracción nivelítica las diferencias de altura medidas de día son demasiado pequeñas y las medidas durante la noche demasiado grandes.

El importe total de la influencia de la refracción nivelítica no ha sido muy importante en la red de nivelación de Finlandia, ya que

no se ha empleado un largo visual demasiado grande (40 - 80 m) y especialmente por ser el terreno llano. Sin embargo en los países en los que la nivelación es efectuada bajo condiciones más desfavorables el importe de la refracción nivelítica es mayor. Cuando las diferencias de altura es de mil metros asciende a un decímetro y en observaciones efectuadas alrededor del mediodía, por ejemplo en Ceylán (1), llega a un importe aun mayor. Las grandes distancias visuales son a este respecto sumamente perjudiciales, con la distancia visual de 150 m, por ejemplo, (en EE. UU.) (2) se obtiene una refracción nivelítica nueve veces mayor que con 50 m.

Las determinaciones del gradiente de temperatura requeridas pueden ejecutarse con suficiente precisión y sin considerable aumento de los trabajos en campaña con ayuda del termómetro de resistencia descripto anteriormente.

(1) Rapport sur les nivellements de précision, Trav. de l'Assoc. Intern. de Géodésie, Tome 12, page 56, 1935.

(2) Ver nota al pie de la página 12.

IMPRESO EN LOS TALLERES GRAFICOS
DEL INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR
BUENOS AIRES 29-VII-1946
1ª EDICION 750 EJ.

LAS PUBLICACIONES DEL INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR

se hallan en venta al público en general en la Sección Ventas, Avenida Ingeniero Huergo 251, 1er. Subsuelo, U. T.: 34-5957.

Informes generales se solicitan en el Instituto Geográfico Militar (Sección Biblioteca y Publicaciones), Avenida Cabildo 381, U. T.: 76-3031, Interno 12.

A—Libros y Folletos

Para mayores datos pídase el Catálogo de Publicaciones Técnico-científicas.

La Serie "Folletos de Divulgación", a que pertenece el presente folleto, se compone de:

- | | |
|---|---------|
| Nº 1—I. El Profesor Ilmari Bonsdorff, por W. Heiskanen; II. Las Triangulaciones del Instituto Geodésico de Finlandia, por V. R. Ölander. | \$ 1.50 |
| Nº 2—Corrección de las Mediciones de Angulos Horizontales debida a la Refracción Lateral, por T. J. Kukkamäki | „ 0.75 |
| Nº 3—Memorándum sobre la Creación y Trabajos del Instituto Panamericano de Geografía e Historia y Resoluciones y Recomendaciones aprobadas en la I y II Reunión de Consulta sobre Geografía y Cartografía — Precedida esta última de una breve reseña de antecedentes | „ 1.50 |
| Nº 4—La Refracción Nivelítica | „ 1.90 |

B—Cartas y Mapas

Para ilustrarse sobre las hojas aparecidas y sus precios, solicítese el Catálogo del Material Cartográfico. (Precio \$ 0.75).

Price \$ 1.90